

33 in 17031 4°

**Ueber das Streufeld
und den Streuinduktionskoeffizienten eines
Transformators mit Scheibenwicklung
und geteilten Endspulen.**

Von

W. Rogowski

Diplom-Ingenieur.

Von der

Technischen Hochschule zu Danzig

ZUR
ERLANGUNG DER WÜRDE EINES
DOKTOR-INGENIEURS

Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs

genehmigte

Dissertation.

Ad 17031 4°



Referent: Herr Professor Dr. Rössler.
Korreferent: Herr Dozent Dr. Simons.

Berlin 1908.



MADE IN
HOLLAND

N 2366173
68663

3. 1908. 1446

**Ueber das Streufeld
und den Streuinduktionskoeffizienten eines
Transformators mit Scheibenwicklung
und geteilten Endspulen.**

Von

W. Rogowski

Diplom-Ingenieur.

a. 8490470

Von der

Technischen Hochschule zu Danzig

zur

ERLANGUNG DER WÜRDE EINES DOKTOR-INGENIEURS

Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs

genehmigte

Dissertation.

Od 17031. 4e

Referent: Herr Professor Dr. Rössler.
Korreferent: Herr Dozent Dr. Simons.



Od⁴⁰-469/85

Berlin 1908.



PLN
BIBLIOTECA CHINEZA

Gewidmet
meinem verehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. A. Sommerfeld
in Hochachtung und Dankbarkeit!





РАН
БИБЛИОТЕКА СРБИЈА

Ueber das Streufeld und den Streuinduktionskoeffizienten eines Transformators mit Scheibenwicklung und geteilten Endspulen.

Von **W. Rogowski**, Dipl.-Ing.

Einleitung.

Der Streuinduktionskoeffizient bestimmt zusammen mit dem Wechselstromwiderstande den Spannungsabfall des belasteten Transformators. Deshalb ist er für die Vorausberechnung eines Transformators von allergrößter Wichtigkeit. Bald nach Erlangung dieser Erkenntnis hat man versucht, den Streuinduktionskoeffizienten aus den Konstruktionsdaten des Transformators zu berechnen. Für diesen Zweck hat Kapp eine Formel aufgestellt. Sie lautet¹⁾

$$S_1 + S_2 = K \frac{2\pi}{c} \left(J + \frac{a_1 + a_2}{6} \right) n^2 L q 10^{-9} \dots \dots (1).$$

$S_1 + S_2$ bedeutet die Summe des primären und sekundären Streuinduktionskoeffizienten in Henry; n ist die Windungszahl einer Spule. Beide sind auf das Uebersetzungsverhältnis 1:1 bezogen. Unter L ist der mittlere Umfang, unter q die Anzahl der primären oder sekundären Spulen, unter K ein Erfahrungsfaktor zu verstehen. Die übrigen Bezeichnungen gehen aus Fig. 2 hervor.

Nach ihrer Ableitung gilt Formel (1) nicht strenge. Ihr liegt die Voraussetzung zugrunde, daß der ganze Raum mit Ausnahme der Spulen und des gerade zwischen ihnen gelegenen Luftspaltes mit Eisen ausgefüllt sei. Sie gibt daher ohne Erfahrungsfaktor viel zu große Werte und soll erst durch diesen für praktische Fälle zugestutzt werden. Dieser hat sich indessen nicht als eine Konstante erwiesen. Schon Kapp hat gefunden, daß seine Größe ungefähr zwischen 0,47 und 0,84 schwankt²⁾. Es kann somit auch heutigen Tages die Frage der Berechnung des Streuinduktionskoeffizienten aus den Konstruktionsdaten des Transformators nicht als zur Zufriedenheit gelöst betrachtet werden.

¹⁾ s. Kapp: Transformatoren, II. Aufl., S. 111 u. f. Arnold: Die Wechselstromtechnik, II. Bd.: Die Transformatoren, S. 32. Man beachte, daß K der reziproke Wert des bei Arnold mit k_s bezeichneten Faktors ist. Uebrigens enthält die Formel (25) bei Arnold einen Druckfehler. Es muß daselbst J und nicht $\frac{J}{2}$ heißen.

²⁾ Elektrotechnische Zeitschrift 1898 S. 245.

Die vorliegende Arbeit setzt sich nun das Ziel, diese Lücke für den Transformator mit Scheibenwicklung und geteilten Endspulen auszufüllen. Für diese Type werden wir in den 3 ersten Abschnitten unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen nicht nur eine Formel für den Streuinduktionskoeffizienten selber, sondern auch eine genaue Beschreibung des Streufeldes geben. Die Grundlage unserer Rechnung bilden die Maxwellschen Gleichungen. Dabei werden wir auf die einfache Formel von Kapp zurückkommen; jedoch mit dem erheblichen Unterschiede, daß der Faktor K sich bei uns nicht als Erfahrungswert, sondern als eine Funktion der Konstruktionsdaten erweist. Im IV. Abschnitt werden wir auf theoretischem Wege die zu erwartenden Abweichungen zwischen unserer Theorie und der Beobachtung abschätzen. Das Schlußkapitel endlich soll einen experimentellen Beweis der Brauchbarkeit unsrer Ueberlegungen bringen.

Abschnitt I.

Das Streufeld des Kerntransformators.

§ 1. Allgemeines über den Streufluß und den Streuinduktionskoeffizienten.

Man teilt die Kraftlinien des auf- und niederwogenden magnetischen Feldes eines belasteten Transformators in zwei Gruppen und unterscheidet:

- 1) solche Kraftlinien, die zugleich sämtliche primären und sekundären Windungen umschlingen,
- 2) solche Kraftlinien, die nur sämtliche primären oder nur sämtliche sekundären Windungen umschlingen.

Die ersteren bilden den Hauptkraftfluß, die letzteren den primären und sekundären Streufluß.

Die angegebene Scheidung ist in der Natur nicht streng vorhanden. Es gibt Kraftlinien, die die obigen Bedingungen nur teilweise erfüllen. Es sind solche vorhanden, die nur mit einem Teile der primären und sekundären Windungen verkettet sind, und wiederum andre, die nur einen Teil sämtlicher primären oder nur einen Teil sämtlicher sekundären Windungen umschlingen. Im Sinne der obigen Scheidung ist dann die erstere Sorte Kraftlinien mit einem Bruchteile ihrer Zahl zum Hauptkraftfluß, mit einem andern Bruchteile zum Streufluß, die letztere nur mit einem Bruchteile zum Streufluß zu schlagen, so daß Hauptkraftfluß und Streufluß, bezogen auf die gesamten Windungszahlen, bei einer zeitlichen Aenderung dieselbe E. M. K. induzieren, wie sie das wirkliche Feld ebenfalls hervorruft.

Die Größe des Streuflusses hängt in einfacher Weise mit den Induktionskoeffizienten des primären und sekundären Stromkreises zusammen.

Es gehe in einem Transformator von dem Uebersetzungsverhältnis 1:1 bei offenem Sekundärkreis ein Strom J_1 durch die Primärwicklung, deren Selbstinduktionskoeffizient L_1 und deren Windungszahl n_1 sein mögen. Die erzeugte Gesamtzahl der Kraftlinienverkettungen beträgt $L_1 J_1$. Mit einer einzigen Windung ist der Kraftfluß $\frac{L_1 J_1}{n_1}$ verkettet. Von letzterem durchsetzt der Teil

$\frac{M J_1}{n_1}$ die Sekundärwicklung (M : gegenseitiger Induktionskoeffizient der beiden

Wicklungen). Der Rest

$$\frac{L_1 J_1}{n_1} - \frac{M J_1}{n_1} = \frac{S_1 J_1}{n_1} \dots \dots \dots (2)$$

ist der primäre Streufluß.

Die Größe $S_1 = L_1 - M$ heißt primärer Streuinduktionskoeffizient.

Durch eine analoge Ueberlegung wird man auf den sekundären Streuinduktionskoeffizienten $S_2 = L_2 - M$ geführt, unter L_2 den Selbstinduktionskoeffizienten der Sekundärspule verstanden.

Schickt man nun in demselben Transformator durch die Primärwicklung den Strom J_1 in dem einen, durch die Sekundärwicklung den gleichen Strom im entgegengesetzten Sinne, so sind mit den einzelnen Windungen nur deren Streuflüsse verkettet. Die gesamte im Streufelde aufgespeicherte Energie T beträgt unter diesen Verhältnissen offenbar

$$T = \frac{1}{2} (S_1 + S_2) J_1^2 \dots \dots \dots (3).$$

Mit Hilfe dieser Beziehung werden wir später für den eben angegebenen Fall der Stromverteilung die Streuinduktionskoeffizienten berechnen. Ist dies geschehen, so sind die Streuflüsse des Transformators für eine jede Belastung mit den Strömen J_1 und J_2 (hier wie im ganzen folgenden bezieht sich der Index 1 auf die primäre, der Index 2 auf die sekundäre Seite) durch Berechnung der Größen $S_1 J_1$ und $S_2 J_2$ bekannt.

Diese Aussage gilt streng nur dann, wenn die Streuinduktionskoeffizienten unabhängig von der Stromstärke sind. Dies braucht nicht einzutreffen, da die Koeffizienten L und M , deren Unterschied den Streuinduktionskoeffizienten ergibt, sich mit der Stromstärke ändern. Wir werden indessen theoretisch und durch Versuche zeigen, daß diese Voraussetzung in der Tat in bester Annäherung erfüllt ist.

Bei beliebigem Uebersetzungsverhältnis mit den zugehörigen Windungszahlen n_1 und n_2 gelten die folgenden Beziehungen

$$S_1 = L_1 - M \frac{n_1}{n_2}$$
$$S_2 = L_2 - M \frac{n_2}{n_1}$$

und es bleibt die eben gemachte Aussage unter der Voraussetzung bestehen, daß die primären und sekundären Amperewindungen einander entgegengesetzt gleich sind.

§ 2. Die physikalische Aufgabe.

Die Spulen der hier behandelten Transformator-type denken wir uns nicht von Wechselstrom, sondern von Gleichstrom durchflossen, und zwar in der eben angegebenen Weise, daß die Amperewindungen zweier benachbarter vollen Spulen sich gegenseitig aufheben und nur das Streufeld entsteht.

Wir ersetzen somit das augenblickliche Wechselfeld durch ein stationäres Feld. Damit wird zugleich die Wirkung der Verschiebungsströme, der Wirbelströme in Kupfer und Eisen auf die Größe des Streuinduktionskoeffizienten vernachlässigt. Dies ist bei den niedrigen Periodenzahlen und dem geringen Einfluß, den, wie wir nachweisen werden, das Eisen auf die Größe des Streuinduktionskoeffizienten in praktischen Fällen hat, durchaus unbedenklich.

Der Spulenquerschnitt sei rechteckig. Er sei gleichförmig vom Strome durchflossen, als ob wir es mit unendlich dünner Isolation zu tun hätten. Der

Krümmungsradius der Spulen sei unendlich groß, so daß wir die Spulen als gerade nach beiden Richtungen ins Unendliche gehende Drähte behandeln können (s. d. Schnitt Fig. 1). Das Transformatorisen ersetzen wir für unsere Betrachtung durch eine Platte. Sie liegt in Fig. 1 zwischen den Ebenen GH

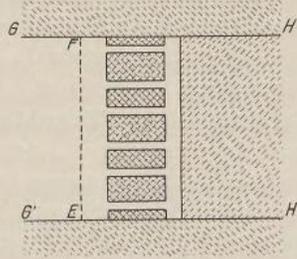


Fig. 1.

und $G'H'$ und ist durch Schraffur gekennzeichnet. Nach rechts hin erstreckt sich die Platte ins Unendliche. Ihre schmale Begrenzungsfläche läuft den Spulen parallel. Die Dicke der Platte ist gleich der von den Spulen bedeckten Höhe des Transformatorenkernes; die Permeabilität sei μ . Schließlich wollen wir den magnetischen Widerstand des Luftraumes oberhalb der Ebene GH und unterhalb der Ebene $G'H'$ vernachlässigen, d. h. wir denken uns diesen Luftraum mit Eisen unendlich hoher Permeabilität ausgefüllt¹⁾.

Infolge dieser Annahme stehen die Kraftlinien auf diesen Ebenen senkrecht. Offenbar kommt nun dieser Bedingung aus Symmetriegründen auch das magnetische Feld des zugehörigen unendlich langen Transformators nach, der entsteht, wenn wir die gegebene Verteilung von Strömung und Permeabilität unendlich oft an den Ebenen GH und $G'H'$ spiegeln. Verleihen wir von diesem Felde nur dem zwischen diesen Ebenen befindlichen Teile Realität, so haben wir das gesuchte Streufeld.

Somit können wir unsere Aufgabe wie folgt, genauer stellen, s. Fig. 2. Parallel

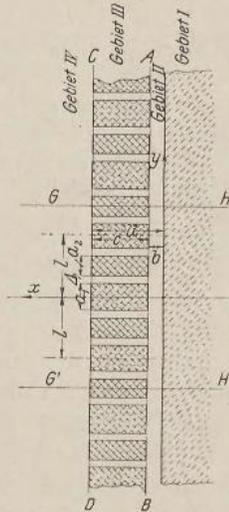


Fig. 2.

¹⁾ Diese Vernachlässigung trotz der Beibehaltung eines endlichen Wertes der Permeabilität des wirklich vorhandenen Eisens ist nicht folgerichtig. Wir halten an ihr fest, um wenigstens in erster Annäherung den Einfluß einer Schwankung im Werte der Permeabilität beurteilen zu können.

zu einer Ebene, zu deren einen Seite der Raum mit Eisen von der Permeabilität μ , zu deren andern Seite der Raum mit Luft (Permeabilität 1) ausgefüllt ist, laufen im Luftraum im Abstände b unendlich viele unter sich parallele Spulen. Sie entsprechen abwechselnd den Primär- und Sekundärspulen eines unendlich langen Transformators. Zwei benachbarte Spulen seien immer durch einen Luftspalt von derselben Größe A voneinander getrennt.

Der rechteckige Spulenquerschnitt ist gleichförmig von Gleichstrom durchflossen. Führt eine Spule den Strom in einem Sinne ins Unendliche, so bringt die benachbarte ihn im entgegengesetzten Sinne aus dem Unendlichen zurück. Das zugehörige magnetische Feld ist zu bestimmen.

Wir hätten uns mit unseren Voraussetzungen weit mehr den wirklichen Verhältnissen anpassen können, ohne uns der Möglichkeit der mathematischen Behandlung unsrer Aufgabe zu berauben. Dies wird im Abschnitt IV gezeigt, wo wir den Einfluß des magnetischen Widerstandes des Luftraumes oberhalb der Ebene GH und unterhalb der Ebene $G'H'$, den Einfluß der Krümmung der Spulen, den induktiven Einfluß der beiden Kerne aufeinander und den Einfluß einer ungleichförmigen Stromverteilung infolge der Isolation noch genauer untersuchen werden. An unsern Voraussetzungen sei indessen wegen der Einfachheit der Rechnung festgehalten.

§ 3. Die mathematische Aufgabe.

Wir wählen ein rechtwinkeliges Koordinatensystem. Seine Lage ist in Fig. 2 angedeutet. Die daselbst nicht sichtbare z -Achse steht senkrecht zur Zeichenebene; x, y, z bilde in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Entsprechend der gegebenen Verteilung von Permeabilität und Strömung teilen wir den gesamten Raum in 4 Gebiete ein. Wir unterscheiden:

- 1) Das Eisengebiet. Gebiet I.
- 2) Ein erstes Luftgebiet, das vom Eisen bis an die durch die Spur AB gegebene Ebene reicht (s. Fig. 2). Gebiet II.
- 3) Das Strömungsgebiet. Gebiet III. Dieses wird von den beiden durch die seitlichen Begrenzungen der Spulen hindurchgelegten Ebenen eingeschlossen.
- 4) Das andere Luftgebiet, Gebiet IV, das sich vom Strömungsgebiete ab bis ins Unendliche erstreckt.

Die Strömung i im Gebiete III erfolgt parallel der z -Achse. Sie ist eine Funktion des Ortes, die sich nur mit der y -Koordinate ändert. Diese Abhängigkeit ist von der Art, wie Fig. 3 (ausgezogene Kurve) gezeichnet. Und zwar

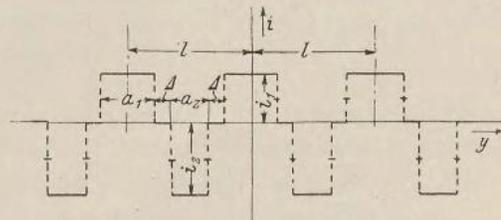


Fig. 3.

bestehen ihre wesentlichsten Merkmale darin, daß sie periodisch von dem Werte Null für Punkte des Luftzwischenraumes auf die Werte i_1 oder i_2 für Punkte des Spulenquerschnitts steigt oder fällt.

Offenbar können wir diese Abhängigkeit durch eine Fouriersche Reihe von der Form

$$i = 1/2 a_0 + a_1 \cos ky + \dots a_n \cos kny \dots \dots \dots (4)$$

$$\left(k = \frac{2\pi}{l}\right)$$

darstellen. Für den Koeffizienten a_n ergibt sich

$$a_n = \frac{2}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} i \cos kny dy = \frac{2}{n\pi} \left[i_1 \sin kn \frac{a_1}{2} \mp i_2 \sin kn \frac{a_2}{2} \right],$$

wo das obere Vorzeichen hier und im folgenden für $n=0$ und grade Werte, das untere Vorzeichen für ungrade Werte von n gilt.

Aus der durch die Formel

$$a_1 i_1 = a_2 i_2$$

ausgedrückten Gleichheit der primären und sekundären Ampèrewindungen folgt weiter

$$a_0 = 0$$

$$a_n = \frac{2i_1}{\pi n} \left[\sin kn \frac{a_1}{2} \mp \frac{a_1}{a_2} \sin kn \frac{a_2}{2} \right].$$

Der Vektor \mathfrak{H} der magnetischen Kraft, dessen Komponenten wir mit X , Y , Z bezeichnen, genügt in allen Gebieten der Gleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0 \dots \dots \dots (5).$$

Ebenso verschwindet in den Gebieten I, II und IV sein curl:

$$\operatorname{curl} \mathfrak{H} = 0 \dots \dots \dots (6),$$

während im Gebiete III — wir rechnen im elektromagnetischen Maßsystem —

$$\operatorname{curl} \mathfrak{H} = 4\pi i \dots \dots \dots (7)$$

zu setzen ist.

Außer diesen Bedingungen haben wir dem Vektor \mathfrak{H} zu seiner vollständigen Bestimmung noch die folgenden aufzuerlegen: Im Endlichen sei er überall endlich. Er verschwinde für unendlich große Werte von x . An der Grenze von irgend zwei Gebieten gehe seine Tangentialkomponente Y stetig über. Das Gleiche gelte von der Komponente X nur mit dem Unterschiede, daß diese an der Trennungsfäche der Gebiete I und II einen Sprung erleide, derart, daß sie im Gebiete II μ mal so groß ist wie im Gebiete I.

Wir setzen nun die magnetische Kraft unabhängig von der z -Koordinate voraus. Alsdann lassen sich die Gl. (3), (6) und (7) in folgender Form schreiben:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \dots \dots \dots (5')$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6')$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} &= 4\pi i \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7')$$

Die beiden ersten Gleichungen der Tripel (6) und (7) besagen, daß Z eine Konstante ist. Deren Wert ist mit Rücksicht auf die Forderung, daß \mathfrak{H} für unendliche Werte von x verschwinden soll, gleich Null.

Dem Reste der Gleichungen genügen wir durch den Ansatz

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial R}{\partial y} \\ Y &= -\frac{\partial R}{\partial x} \end{aligned}$$

Durch ihn wird (5') identisch erfüllt, während aus (6') und (7') folgt, daß R in den Gebieten I, II und IV der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} = 0 \dots \dots \dots (8)$$

im Gebiete III der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} = -4\pi i \dots \dots \dots (9)$$

genügt, unter i die durch Formel (4) gegebene Funktion verstanden.

Somit lautet unsere mathematische Aufgabe: Es ist eine Funktion R der Koordinaten x, y zu finden, die im Gebiete I, II und IV die Differentialgleichung (8), im Gebiete III die Differentialgleichung (9) erfüllt. Der Differentialquotient dieser Funktion $-\frac{\partial R}{\partial x} = Y$ sei im Endlichen überall endlich. Er verschwinde für unendlich große Werte von x . Er gehe an der Grenze zweier Gebiete stetig über. Das Gleiche gilt von dem Differentialquotienten $\frac{\partial R}{\partial y} = X$, nur mit dem einzigen Unterschiede, daß er an der Grenze I und II sich sprungweise ändere, derart, daß

$$\mu \frac{\partial R}{\partial y} \text{ I} = \frac{\partial R}{\partial y} \text{ II}$$

ist, wo die Indizes I und II für die entsprechenden Gebiete gelten.

Wir bemerken, daß die Größe R nichts weiter ist, als die z -Komponente des Vektorpotentials \mathfrak{A} der magnetischen Kraft \mathfrak{H} , das mit dieser in der Beziehung

$$\mathfrak{H} = \text{curl } \mathfrak{A}$$

steht, und über dessen Divergenz gemäß der Vorschrift

$$\text{div } \mathfrak{A} = 0$$

verfügt ist. Denn mit \mathfrak{H} ist auch \mathfrak{A} von der Koordinate z unabhängig. Mit dieser Folgerung liefern die obigen Gleichungen und die Gl. (6) und (7) 2 Gleichungssysteme. Von diesen verknüpft das eine die Komponente z mit der x - und y -Komponente des Vektorpotentials, das andere die Komponenten X und Y mit der z -Komponente des Vektorpotentials. Ersteres hat, da $Z = 0$, keinen Einfluß auf unsere Aufgabe. Letzteres führt genau wie vorhin zu den partiellen Differentialgleichungen (8) und (9).

§ 4. Lösung der partiellen Differentialgleichung. Allgemeiner Ausdruck für die Komponenten der magnetischen Kraft.

Mit dem naheliegenden Ansatz:

$$R = R_0 = R_1 \cos ky + \dots R_n \cos kny,$$

wo $R_0 \dots R_n$ nur von x abhängige Funktionen sein sollen, ergeben die linken Seiten der Gl. (8) und (9) bei passender Anordnung ihrer Glieder wiederum Fouriersche Reihen. Den Gleichungen selbst genügen wir dadurch, daß wir in (8) jedes Glied der entstandenen Reihe gleich Null, in (9) jedes Glied der linker

Hand stehenden Fourierschen Reihe dem entsprechenden Gliede der rechts befindlichen Reihe gleichsetzen. Dieses Vorgehen liefert die gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 R_0}{dx^2} &= 0 \\ \frac{d^2 R_1}{dx^2} - k_1^2 R_1 &= 0 \\ \vdots \\ \frac{d^2 R_n}{dx^2} - k^2 n^2 R_n &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8')$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 R_0}{dx^2} &= 0 \\ \frac{d^2 R_1}{dx^2} - k^2 R_1 &= -4\pi\alpha_1 \\ \vdots \\ \frac{d^2 R_n}{dx^2} - k^2 n R_n &= -4\pi\alpha_n \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9'),$$

in deren Lösungen

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= \beta_0 + \beta_0'x \\ R_1 &= \beta_1 e^{kx} + \beta_1' e^{-kx} \\ \vdots \\ R_n &= \beta_n e^{knx} + \beta_n' e^{-knx} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8'')$$

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= \gamma_0 + \gamma_0'x \\ R_1 &= \gamma_1 e^{kx} + \gamma_1' e^{-kx} + \frac{4\pi\alpha_1}{k^2} \\ \vdots \\ R_n &= \gamma_n e^{knx} + \gamma_n' e^{-knx} + \frac{4\pi\alpha_n}{n^2 k^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9'')$$

sind für jedes neue Gebiet neue Werte der Integrationskonstanten zu setzen. Wir können somit das Vektorpotential in folgender Form anschreiben:

Gebiet I $R = A_0 + A_0'x + (A_1' e^{kx} + A_1 e^{-kx}) \cos ky + \dots$
 $(A_n e^{knx} + A_n' e^{-knx}) \cos kny$

Gebiet II $R = B_0 + B_0'x + (B_1 e^{kx} + C_1 e^{-kx}) \cos ky + \dots$
 $(B_n e^{knx} + C_n e^{-knx}) \cos kny$

Gebiet III $R = E_0 + E_0'x + (E_1 e^{kx} + F_1 e^{-kx} + \frac{4\pi\alpha_1}{k^2}) \cos kny + \dots$
 $(E_n e^{knx} + F_n e^{-knx} + \frac{4\pi\alpha_n}{n^2 k^2}) \cos kny$

Gebiet IV $R = D_0 + D_0'x + (D_1' e^{kx} + D_1 e^{-kx}) \cos ky + \dots$
 $(D_n' e^{knx} + D_n e^{-knx}) \cos kny.$

Offenbar sind die Konstanten A_0, B_0, E_0, D_0 ohne jeden Einfluß auf die Größe der magnetischen Kraft, da sie beim Differenzieren herausfallen. Wir können und wollen sie gleich Null setzen.

Die Forderung, daß die Differentialquotienten $\frac{\partial R}{\partial x}$ und $\frac{\partial R}{\partial y}$ für unendlich große Werte von x verschwinden sollen, zwingt in gleicher Weise mit den Konstanten $A_0', A_1', \dots, A_n', D_0', D_1', \dots, D_n'$ zu verfahren.

Für die noch übrig bleibenden Konstanten liefern die Seite 10 und 11 aufgestellten Bedingungen für den Uebergang an der Grenze zweier Gebiete die folgenden Beziehungen:

Uebergang von Gebiet I zu Gebiet II ($x = 0$):

$$\begin{aligned} 0 &= B_0 \\ A_1 &= B_1 - C_1 \\ \mu A_1 &= A_1 + C_1 \\ &\vdots \\ A_n &= B_n - C_n \\ \mu A_n &= B_n + C_n \end{aligned}$$

Uebergang von Gebiet II zu Gebiet III ($x = b$).

$$\begin{aligned} 0 &= E_0' \\ B_1 e^{kb} - C_1 e^{-kb} &= E_1 e^{kb} - F_1 e^{-kb} \\ B_1 e^{kb} + C_1 e^{-kb} &= E_1 e^{kb} + F_1 e^{-kb} + \frac{4\pi\alpha}{k^2} \\ &\vdots \\ B_n e^{knb} - C_n e^{-knb} &= E_n e^{knb} - F_n e^{-knb} \\ B_n e^{knb} + C_n e^{-knb} &= E_n e^{knb} + F_n e^{-knb} + \frac{4\pi\alpha_n}{n^2 k^2} \end{aligned}$$

Uebergang von Gebiet III zu Gebiet IV ($x = d$).

$$\begin{aligned} E_1 e^{kd} - F_1 e^{-kd} &= -D_1 e^{-kd} \\ E_1 e^{kd} + F_1 e^{-kd} + \frac{4\pi\alpha_1}{k^2} &= D_1 e^{-kd} \\ &\vdots \\ E_n e^{knd} - F_n e^{-knd} &= -D_n e^{-knd} \\ E_n e^{knd} + F_n e^{-knd} + \frac{4\pi\alpha_n}{n^2 k^2} &= D_n e^{-knd} \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= 0; E_0' = 0 \\ A_n &= \frac{1}{\mu + 1} \frac{4\pi\alpha_n}{n^2 k^2} e^{-knb} (1 - e^{-knc}) \\ B_n &= \frac{2\pi\alpha_n}{n^2 k^2} e^{-knb} (1 - e^{-knc}) \\ C_n &= \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \frac{2\pi\alpha_n}{n^2 k^2} e^{-knb} (1 - e^{-knc}) \\ E_n &= -\frac{2\pi\alpha_n}{n^2 k^2} e^{-knd} \\ F_n &= -\frac{2\pi\alpha_n}{n^2 k^2} e^{knb} \left(1 - \frac{\mu - 1}{\mu + 1} e^{-2knb} [1 - e^{-knc}]\right) \\ D_n &= \frac{2\pi\alpha_n}{n^2 k^2} e^{knd} (1 - e^{-knc}) \left(1 + \frac{\mu - 1}{\mu + 1} e^{-kn(b+d)}\right) \end{aligned} \right\} \dots (10).$$

Das Ergebnis dieses Abschnittes lautet somit: Die Komponenten der magnetischen Kraft des Streufeldes lassen sich nach den Formeln $Y = -\frac{\partial R}{\partial x}$; $X = \frac{\partial R}{\partial y}$ als Differentialquotienten eines Vektorpotentials R schreiben, für das für die verschiedenen Gebiete folgende Ausdrücke gelten:

$$\left. \begin{aligned} \text{Gebiet I: } R &= \sum_1^{\infty} A_n e^{knx} \cos kny \\ \text{» II: } R &= \sum_1^{\infty} (B_n e^{knx} + C_n e^{-knx}) \cos kny \\ \text{» III: } R &= \sum_1^{\infty} \left(E_n e^{knx} + F_n e^{-knx} + \frac{4\pi\alpha_n}{n^2 k^2} \right) \cos kny \\ \text{» IV: } R &= \sum_1^{\infty} D_n e^{-knx} \cos kny \end{aligned} \right\} \dots (10').$$

Die Konstanten sind nach Gl. (10) zu berechnen.

Abschnitt II.

Das Streufeld des Kerntransformators.

[Fortsetzung.]

§ 1. Kraftlinien.

Die Gleichung der Kraftlinien genügt der Bedingung

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{Y}{X} = - \frac{\frac{\partial R}{\partial x}}{\frac{\partial R}{\partial y}}$$

Sie lautet somit:

$$R = \text{konst.}$$

Tafel I bis IV zeigen hierhin gehörige Kraftlinienbilder. Diese sind dadurch entstanden, daß man zunächst für die den Figuren zu entnehmenden Abmessungen nach Gl. (10) die Konstanten A_n ; $B_n \dots$; D_n bestimmte und dann nach Vorgabe eines bestimmten Wertes für das Vektorpotential und einer passend gewählten Anzahl Werten der einen Koordinate die zugehörigen Werte der anderen Koordinate nach Gl. (10') berechnete. Dabei konnte man sich, ohne auf eine weitgehende Annäherung zu verzichten, bei den Tafeln I, II und IV auf das erste Glied, bei der Tafel III auf das erste und zweite Glied der Fourierschen Reihe Gl. (10') beschränken.

Die Kraftlinienbilder reden für sich selbst. Nur die folgenden Merkmale seien besonders hervorgehoben:

1) Beim Eintritt in das Eisen erleiden die Kraftlinien eine Brechung.

2) Bei eisenlosem Felde fällt derjenige Punkt, für den die magnetische Kraft im Endlichen verschwindet, in den Mittelpunkt des Querschnittes einer jeden Spule. Beim Vorhandensein von Eisen verschiebt er sich in der Richtung nach dem Eisen hin. Er fällt bei unmittelbarer Berührung von Eisen und Spule in die Berührungsebene.

3) Man denke sich zu der gegebenen Stromverteilung noch die durch ihre Spiegelung an der Eisenoberfläche entstehende hinzugefügt und dann das Eisen aus dem Felde entfernt. Alsdann findet man, daß das Feld im früheren Luftraume ($\frac{\mu-1}{\mu+1} = 1$ gesetzt) unverändert geblieben ist, d. h. mit der kleinen Vernachlässigung, die wir begehen, wenn wir $\frac{\mu-1}{\mu+1}$ gleich 1 setzen, wirkt das Eisen für das im Luftraume befindliche Feld wie ein vollkommener Spiegel.

4) Die magnetische Kraft sinkt in den Gebieten I und IV mit wachsendem Werte x sehr schnell (nach einer Exponentialfunktion) auf Null herab.

5) Die ins Unendliche gehenden Kraftlinien genügen der Gleichung

$$R = 0 \dots \dots \dots (11).$$

Sie sind mitten durch die Luftspalte hindurchgehende Grade, wenn Primär- und Sekundärspule gleiche Höhe haben. Trifft dies nicht

zu, so sind sie gekrümmte Linien, die sich in den Gebieten I und IV sehr rasch an diejenigen Geraden asymptotisch anschließen, die den Abstand der Querschnittsmittellinien benachbarter Spulen halbieren.

6) Die Differenz des Vektorpotentials hat absolut genommen für zwei benachbarte Kraftlinien immer denselben Wert.

§ 2. Der Streuinduktionskoeffizient.

Die gesamte im Raum enthaltene magnetische Energie ist, wie zu erwarten, in unserem Falle unendlich groß. Dagegen hat die mit der Längeneinheit einer Spule verkettete Energie einen endlichen Betrag. Dieser Umstand erlaubt nach einer zur Gl. (3) analogen Beziehung einen Streuinduktionskoeffizienten für die Längeneinheit aufzustellen.

Zur Berechnung der mit der Längeneinheit einer Spule verketteten Energie grenzen wir um irgend eine Spule — etwa um die von der x -Achse getroffene — einen Raumteil ab. Dies geschehe, s. Fig. 4, durch 2 um die Längeneinheit ent-

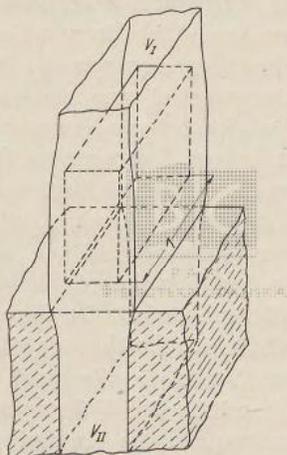


Fig. 4.

fernte senkrecht zur z -Achse stehende Ebenen und durch 2 Flächen, die dadurch entstehen sollen, daß wir 2 benachbarte ins Unendliche gehende Kraftlinien, die die Spule zwischen sich einschließen, parallel zur z -Achse verschieben. Dieser Raumteil teilt sich wieder durch die Trennungsebene zwischen Luft und Eisen in die Gebiete V_I und V_{II} , deren Energieinhalte entsprechend mit T_I und T_{II} bezeichnet werden.

Die für die magnetische Energie gültige Formel

$$T = \frac{1}{8\pi} \int (\mathfrak{H} \mathfrak{B}) dv$$

ergibt

$$T_I = \frac{1}{8\pi} \int_{V_I} \mathfrak{H}^2 dv$$

$$T_{II} = \frac{\mu}{8\pi} \int_{V_{II}} \mathfrak{H}^2 dv$$

Diese Integrale formen wir dadurch um, daß wir setzen (man beachte den Schluß des § 3 des vorigen Abschnittes, S. 11):

$$\mathfrak{H}^2 = \mathfrak{H} \operatorname{curl} \mathfrak{A} = \mathfrak{A} \operatorname{curl} \mathfrak{H} - \operatorname{div} [\mathfrak{H} \mathfrak{A}]^1).$$

Uebers dies machen wir von dem Gaußschen Satze

$$\int \operatorname{div} [\mathfrak{H} \mathfrak{A}] dv = \int [\mathfrak{H} \mathfrak{A}]_v df$$

Gebrauch; $[\mathfrak{H} \mathfrak{A}]_v$ bezeichnet die Komponente des Vektorproduktes $[\mathfrak{H} \mathfrak{A}]$, die in die Richtung der nach außen weisenden Normalen fällt. Wir erhalten:

$$T = T_I + T_{II} = \frac{1}{8\pi} \int_{V_I} \mathfrak{A} \operatorname{curl} \mathfrak{H} dv + \frac{\mu}{8\pi} \int_{V_{II}} \mathfrak{A} \operatorname{curl} \mathfrak{H} dv - \frac{1}{8\pi} \int_{V_I} df [\mathfrak{H} \mathfrak{A}]_v - \frac{\mu}{8\pi} \int_{V_{II}} df [\mathfrak{H} \mathfrak{A}]_v \dots (12).$$

Die Volumenintegrale sind über die hinzugefügten Bereiche, die Oberflächenintegrale über die zugehörigen Begrenzungen zu nehmen.

Wir zeigen nun, daß letztere zu dem Betrage der magnetischen Energie nichts beisteuern.

1) Für unendlich große Werte von x verschwindet das Vektorprodukt und somit auch der Beitrag der unendlich fernen Begrenzungen des betrachteten Raumteiles zu den Oberflächenintegralen wie die Exponentialfunktion.

2) Da von dem Vektorpotential nur dessen z -Komponente in Betracht kommt, kann das Vektorprodukt keine z -Komponente und es können die zur z -Achse senkrechten Ebenen keinen Beitrag zum Oberflächenintegral liefern.

3) Das Gleiche gilt für die seitlichen Begrenzungen. Denn für die durch das Unendliche gehenden Kraftlinien, durch deren Verschiebung parallel der z -Richtung diese Begrenzungen entstehen sollten, verschwindet nach Gl. (11) das Vektorpotential und mit ihm das Vektorprodukt.

4) Der Rest der Oberflächenintegrale ist durch Integration über die Trennungsebene von Eisen und Luft, wo $[\mathfrak{H} \mathfrak{A}]_v = \mp YR$ gilt, zu gewinnen. Dasselbst sind nun (1) für die Gebiete V_I und V_{II} die nach außen weisenden Normalen entgegengesetzt gerichtet, (2) erfüllt das Vektorpotential den auf Seite 12 aufgeführten Übergangsgleichungen zufolge die Bedingung $\mu R_I = R_{II}$. Es müssen sich somit die Integrale

$$\int_{V_I} [\mathfrak{H} \mathfrak{A}]_v df, \\ \mu \int_{V_{II}} [\mathfrak{H} \mathfrak{A}]_v df,$$

genommen über die Trennungsebene von Eisen und Luft, gegenseitig aufheben.

Die Oberflächenintegrale in Gl. (12) sind daher gänzlich zu streichen. Diese vereinfacht sich noch weiter mit Rücksicht darauf, daß $\operatorname{curl} \mathfrak{H} = 4\pi i$ nur im Gebiete III und daselbst auch nur für den Spulenquerschnitt einen von Null verschiedenen Wert und zwar den konstanten Wert $4\pi i_1$ hat, und daß man $dv = dxdy1$ setzen kann, zu dem Ausdrucke

$$T = \frac{i_1}{2} \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} \int_b^d R dx dy = \frac{i_1}{2} \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} \int_1^\infty \sum_n \left(E_n e^{knx} + F_n e^{-knx} + \frac{4\pi \alpha_n}{n^2 k^2} \right) \cos kny dx dy.$$

¹⁾ s. Abraham-Föppl: Theorie der Elektrizität, Bd. I, II. Aufl., S. 222.

Die Ausführung der Integration ergibt:

$$T = \frac{8 i_1 c}{k^3} \sum_1^{\infty} n \frac{\sin^2 kn \frac{a_1}{2} \mp \frac{a_1}{a_2} \sin kn \frac{a_2}{2} \sin kn \frac{a_1}{2}}{n^4} \left[1 - \frac{1-e^{-knc}}{knc} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\mu-1}{\mu+1} e^{-2knb} (1-e^{-knc}) \right) \right].$$

Es sei nun für die betrachtete Primärspule s_1 der Streuinduktionskoeffizient für die Längeneinheit, n_1 die Windungszahl, J_1 der die einzelne Windung durchsetzende Strom, so können wir

$$J_1 = \frac{i_1 a_1 c}{n_1}$$

und analog zu (2)

$$T = \frac{1}{2} s_1 J_1^2$$

schreiben. Dieses Vorgehen ergibt

$$s_1 = \frac{16 n_1^2}{c a_1^2 k^3} \sum_1^{\infty} n \frac{\sin^2 kn \frac{a_1}{2} \mp \frac{a_1}{a_2} \sin kn \frac{a_2}{2} \sin kn \frac{a_1}{2}}{n^4} \left[1 - \frac{1-e^{-knc}}{knc} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\mu-1}{\mu+1} e^{-2knb} (1-e^{-knc}) \right) \right] \dots \dots \dots (13).$$

Entsprechend erhält man für den sekundären Streuinduktionskoeffizienten für die Längeneinheit:

$$s_2 = \frac{16 n_2^2}{c a_2^2 k^3} \sum_1^{\infty} n \frac{\sin^2 kn \frac{a_2}{2} \pm \frac{a_2}{a_1} \sin kn \frac{a_1}{2} \sin kn \frac{a_2}{2}}{n^4} \left[1 - \frac{1-e^{-knc}}{knc} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\mu-1}{\mu+1} e^{-2knb} (1-e^{-knc}) \right) \right] \dots \dots \dots (14).$$

§ 3. Näherungsformel für den praktischen Gebrauch.

Bevor wir uns dem eigentlichen Gegenstande dieses Paragraphen zuwenden, betrachten wir den Fall, daß der Strom in einer recht dünnen Schicht fließt, sodaß c eine recht kleine Zahl ist. Alsdann können wir e^{-knc} in eine Potenzreihe entwickeln. Indem wir quadratische Glieder und Glieder höherer Ordnung gegen die Einheit streichen, erhalten wir:

$$s_1 = \frac{16 n_1^2}{k^2 a_1^2} \sum_1^{\infty} n \frac{\sin^2 kn \frac{a_1}{2} \mp \frac{a_1}{a_2} \sin kn \frac{a_2}{2} \sin kn \frac{a_1}{2}}{n^3} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\mu-1}{\mu+1} e^{-2knb} \right].$$

$$s_2 = \frac{16 n_2^2}{k^2 a_2^2} \sum_1^{\infty} n \frac{\sin^2 kn \frac{a_2}{2} \pm \frac{a_2}{a_1} \sin kn \frac{a_1}{2} \sin kn \frac{a_2}{2}}{n^3} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\mu-1}{\mu+1} e^{-2knb} \right].$$

Der Faktor $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\mu-1}{\mu+1} e^{-2knb}$ nimmt nun den Wert $\frac{1}{2}$ oder den Wert 1 an ($\frac{\mu-1}{\mu+1} = 1$ gesetzt), je nachdem $b = \infty$ oder $b = 0$ gesetzt wird. Wir finden

somit, wie es sein muß, daß bei der gemachten Voraussetzung der Streuinduktionskoeffizient den einen oder den doppelten Wert annimmt, je nachdem man das Eisen aus dem Felde entfernt oder Eisen und Spulen aufeinander preßt.

Bei der Aufstellung einer dem praktischen Gebrauch dienenden Formel machen wir folgende Annahmen:

1) Das Verhältnis $\frac{a_1 + a_2 + 2 \Delta}{a_1 + a_2}$ entferne sich nicht zu weit von der Einheit, etwa

$$1 < \frac{a_1 + a_2 + 2 \Delta}{a_1 + a_2} < 2.$$

In der Tat zwingt den Konstrukteur die Rücksicht auf billige Herstellung des Transformators und auf einen kleinen Spannungsabfall, den Luftzwischenraum A auf das Mindestmaß zu beschränken. Der in der Ungleichung noch zugelassene Fall, daß der Luftspalt ungefähr gleich der mittleren Spulenhöhe ist, dürfte schon ganz ungewöhnlichen Verhältnissen gerecht werden.

2) Die Breite c der Spulen sei größer oder mindestens grade so groß als deren Höhe, so daß

$$kc = \frac{2\pi c}{a_1 + a_2 + 2A} > 1,5$$

ist. Auch diese Forderung dürfte man, da die gleichen Gründe wie vorhin dafür sprechen, immer erfüllt finden.

Bei einer Reihe mir aus der Praxis zur Verfügung gestellten Daten lag der fragliche Wert sogar durchweg höher als 3.

Mit Voraussetzung 1) konvergieren die Reihen (13) und (14) sehr rasch. Ihr erstes Glied überwiegt mit seinem Betrage weit die Summe sämtlicher übrigen Glieder. Dann können wir Voraussetzung 2) zufolge mit einem ganz geringen Fehler im Endresultat den mit n variablen Faktor

$$1 - \frac{1 - e^{-knc}}{knc} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\mu - 1}{\mu + 1} e^{-2knb} (1 - e^{-knc}) \right]$$

durch den konstanten Faktor

$$1 - \frac{1 - e^{-kc}}{kc} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\mu - 1}{\mu + 1} e^{-2kb} (1 - e^{-kc}) \right]$$

ersetzen.

Ein Beispiel möge die Größenordnung der mit diesem Vorgehen verbundenen Fehler zeigen. Für den auf Tafel III dargestellten Fall:

$$a_1 = 30 \text{ cm}; a_2 = 1,5 \text{ cm}; c = 3,6 \text{ cm}; A = 0,7 \text{ cm}; b = 0,5 \text{ cm}$$

ergibt die strenge Rechnung:

$$s_1 = \frac{16 n_1^2}{k^3 a_1^2 c} \left[2,44 \cdot 0,815 - \frac{0,14 \cdot 0,88}{16} - \frac{2,34 \cdot 0,915}{81} \right] = \frac{16 n_1^2}{k^3 a_1^2 c} \cdot 2,024$$

$$s_2 = \frac{16 n_2^2}{k^3 a_2^2 c} \left[0,88 \cdot 0,815 + \frac{1,03 \cdot 0,88}{16} - \frac{0,12 \cdot 0,915}{81} \right] = \frac{16 n_2^2}{k^3 a_2^2 c} \cdot 0,776$$

die angenäherte Rechnung:

$$s_1 = \frac{16 n_1^2}{k^3 a_1^2 c} \left[2,44 \cdot 0,815 - \frac{10,4 \cdot 0,815}{16} - \frac{2,34 \cdot 0,815}{81} \right] = \frac{16 n_1^2}{k^3 a_1^2 c} \cdot 2,020$$

$$s_2 = \frac{16 n_2^2}{k^3 a_2^2 c} \left[0,88 \cdot 0,815 + \frac{0,88 \cdot 0,815}{16} + \frac{0,12 \cdot 0,815}{81} \right] = \frac{16 n_2^2}{k^3 a_2^2 c} \cdot 0,769,$$

wobei der Fehler für

jedes einzelne Glied 0 pCt. 7 pCt. 10 pCt.,

dagegen für das Endergebnis bei s_1 0,2 pCt., bei s_2 0,9 pCt. beträgt.

Wir setzen somit:

$$s_1 = \frac{16 n_1^2}{c a_1^2 k^3} \left[1 - \frac{1 - e^{-kc}}{kc} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\mu - 1}{\mu + 1} e^{-2kb} (1 - e^{-kc}) \right) \right]$$

$$\sum_1^n \frac{\sin^2 kn \frac{a_1}{2} \pm \frac{a_1}{a_2} \sin kn \frac{a_1}{2} \sin kn \frac{a_2}{2}}{n^4} \dots \dots \dots (15)$$

$$s_2 = \frac{16n_1^2}{ca_2^2k^3} \left[1 - \frac{1-e^{-kc}}{kc} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\mu-1}{\mu+1} e^{-2kb} (1-e^{-kc}) \right) \right] \sum_1^{\infty} \frac{\sin^2 kn \frac{a_2}{2} \mp \frac{a_2}{a_1} \sin kn \frac{a_1}{2} \sin kn \frac{a_2}{2}}{n^4} \dots \dots \dots (16).$$

Nun integriere fortgesetzt die in dem Intervall $0 < x < 2\pi$ gültige Formel¹⁾

$$\frac{\pi}{2} - x = \sin x + \frac{\sin}{2} 2x + \dots \sin \frac{nx}{n}$$

und beachte den Grenzwert

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 \dots$$

Dann überzeugt man sich von der Richtigkeit folgender Entwicklung:

$$\frac{x^4}{48} + \frac{\pi^2 x^2}{12} - \frac{\pi x^3}{12} = 1 - \cos x + \frac{1}{2^4} (1 - \cos 2x) + \dots \frac{1}{n^4} (1 - \cos nx),$$

aus der durch eine naheliegende Umformung

$$\sum_1^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^4} = \frac{x^4}{6} + \frac{\pi^2 x^2}{6} - \frac{\pi x^3}{3} \dots \dots \dots (17)$$

folgt.

Ganz entsprechend findet man aus der im Gebiete $0 < x < \pi$ gültigen Formel²⁾

$$\frac{x}{2} = \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{3} \dots \pm \sin \frac{nx}{n}$$

unter Beachtung, daß

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - 1/4 + 1/9 - 1/16 \dots$$

ist, die Formel

$$\frac{x^4}{48} - \frac{\pi^2 x^2}{24} = \cos x - \frac{1}{2^4} \cos 2x + \frac{1}{3^4} \cos 3x \dots \pm \frac{1}{n^4} \cos nx$$

Von dieser ziehen wir die entsprechend für das Argument x' gebildete Formel ab. Die Differenz gleichstelliger Glieder verwandeln wir jedesmal in ein Produkt. Wir erhalten nach einer weiteren naheliegenden Umformung

$$\sum_1^{\infty} \mp \frac{\sin nx \sin nx'}{n^4} = \frac{\pi^2}{48} [(x+x')^2 - (x-x')^2] - \frac{1}{96} [x+x']^4 - (x-x')^4] (18).$$

Die Ausführung der Summierung in Gl. (15) und (16) mit Hilfe von (17) und (18) ergibt:

$$s_1 = \frac{\pi n_1^2}{6c} \left[1 - \frac{1-e^{-kc}}{kc} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\mu-1}{\mu+1} e^{-2kb} (1-e^{-kc}) \right) \right] \left[3l - 4a_1 + \frac{a_1^2 - a_2^2}{l} \right] (19).$$

$$s_2 = \frac{\pi n_2^2}{6c} \left[1 - \frac{1-e^{-kc}}{kc} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\mu-1}{\mu+1} e^{-2kb} (1-e^{-kc}) \right) \right] \left[3l - 4a_2 - \frac{a_1^2 - a_2^2}{l} \right] (20).$$

Nun beträgt der Leerlaufstrom in der Regel nur wenige Prozente des Volllaststromes. Bis auf einen Fehler höherer Ordnung stimmt dann, das Uebersetzungsverhältnis 1:1 vorausgesetzt, bei normaler Belastung der Primärstrom mit dem Sekundärstrom überein. Wir ziehen unter der Annahme, daß beide Ströme gleich sind, die Gl. (19) und (20) zu der einen Gleichung

$$s_1 + s_2 = \frac{2\pi n_1^2}{c} \left[\mathcal{J} + \frac{a_1 + a_2}{6} \right] \left[1 - \frac{1-e^{-kc}}{kc} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\mu-1}{\mu+1} e^{-2kb} (1-e^{-kc}) \right) \right] (21),$$

¹⁾ s. Riemann-Weber: Die partiellen Differentialgleichungen der mathem. Physik 1900, Bd. I, S. 68.

²⁾ loc. cit. S, 77.

zusammen. Aus dieser folgt für den Streuinduktionskoeffizienten des ganzen Transformators in Henry:

$$S = S_1 + S_2 - \frac{2\pi n^2}{c} Lq \left[A + \frac{a_1 + a_2}{6} \right] \left[1 - \frac{1 - e^{-kc}}{kc} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\mu - 1}{\mu + 1} e^{-2kb} (1 - e^{-kc}) \right) \right] 10^{-9} \quad (21')$$

und für den induktiven Spannungsabfall in Volt

$$\Delta E = \frac{4\pi^2 n^2 \nu^2}{c} LqJ \left[A + \frac{a_1 + a_2}{6} \right] \left[1 - \frac{1 - e^{-kc}}{kc} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\mu - 1}{\mu + 1} e^{-2kb} (1 - e^{-kc}) \right) \right] 10^{-9} \quad (22).$$

wo unter L der Spulenumfang, unter q die Anzahl der primären oder sekundären Spulen, unter ν die Periodenzahl, unter J der Vollaststrom im Ampere zu verstehen ist.

Somit sind wir, was von vornherein nicht zu erwarten war, auf die Kapp'sche Gl. (1) zurückgekommen. Jedoch mit einem erheblichen Unterschiede: Der Erfahrungsfaktor K erweist sich als die Funktion

$$1 - \frac{1 - e^{-kc}}{kc} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\mu - 1}{\mu + 1} e^{-2kb} (1 - e^{-kc}) \right).$$

Ueberdies hat unsere Rechnung den Vorzug einer durchaus strengen Ableitung.

Vergegenwärtigt man sich die Bedeutung der Größe k , so überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit folgender beiden Sätze:

Bei gegebener Zahl der Spulen eines Transformators nimmt der Streuinduktionskoeffizient mit dem Luftspalt und der Höhe der Spulen etwas langsamer als proportional zu.

Verteilt man die Gesamtwindungszahl eines Transformators auf mehrere Spulen und nimmt man an, daß sich der Luftspalt bei wachsender Spulenzahl in demselben Verhältnis wie die Spulenhöhe verkleinert, so gilt:

Der Streuinduktionskoeffizient eines Transformators mit gegebener Windungszahl nimmt etwas langsamer als quadratisch mit der Anzahl der Spulen ab.

Die Permeabilität μ , von deren Einfluß der mit dem Quotienten $\frac{\mu - 1}{\mu + 1}$ behaftete Term herrührt, war von uns als konstant vorausgesetzt worden. Diese schwankt in Wirklichkeit jedoch beträchtlich sowohl mit der Amplitude der Stromstärke als auch mit der Phase innerhalb einer Periode. Da jedoch jener Quotient erst für ungewöhnlich niedrige Werte von μ eine ins Gewicht fallende Abweichung von der Einheit aufweist, so schließen wir:

Der Streuinduktionskoeffizient eines Transformators mit Scheibenwicklung und geteilten Endspulen ist von den Schwankungen der Permeabilität praktisch unabhängig, vergl. S. 7.

Die Gl. (21) und (22) berücksichtigen die genaueren Abmessungen des Eisenquerschnittes des Transformatorernes nicht.

Sie erlauben höchstens eine Abschätzung des hierdurch begangenen Fehlers durch Einsetzen einer unteren und oberen Grenze für die Größe b . Dieser Mangel beeinträchtigt keineswegs ihre Brauchbarkeit. Denn zunächst lehrt das

Verhalten des Faktors $K = 1 - \frac{1 - e^{-kc}}{kc} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\mu - 1}{\mu + 1} e^{-2kb} (1 - e^{-kc}) \right)$, daß der

wenn auch nicht vollständig, wie wir voraussetzen, so doch angenähert zur Hälfte durch die Jochstücke des Transformators mit Eisen ausgekleidet ist.

Indem wir wieder mit der auf Seite 8 gegebenen Rechtfertigung die gegebene Strom- und Permeabilitätsverteilung unendlich oft an den Ebenen GH und $G'H'$ spiegeln, gelangen wir zu dem durch Fig. 5 angedeuteten Probleme:

Es sind 2 parallele Ebenen gegeben, die mit ihren zugewandten Seiten einen Luftraum (Permeabilität 1), mit ihren abgewandten Seiten einen mit Eisen ausgefüllten Raum (Permeabilität μ) begrenzen. Im Luftraume befindet sich die auf Seite 9 geschilderte Stromverteilung. Es soll das zugehörige magnetische Feld bestimmt werden.

§ 2. Die mathematische Aufgabe und ihre Lösung.

Die Lage des Koordinatensystems, die Einteilung des Raumes in verschiedene Gebiete wählen wir genau so wie früher, jedoch mit dem Unterschiede, daß das Gebiet IV jetzt nur bis zur Oberfläche des neu hinzugefügten Eisens reichen solle, und daß wir den von diesem Eisen selbst ausgefüllten Raum als Gebiet V bezeichnen.

In letzterem erfüllt die magnetische Kraft ebenfalls die Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathfrak{H} &= 0 \\ \operatorname{curl} \mathfrak{H} &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesem Grunde ist die mathematische Aufgabe die gleiche wie früher. Nur haben wir der Aenderung der Permeabilität im Gebiete V durch die Vorschrift Rechnung zu tragen, daß an der Grenze der Gebiete IV und V der Differentialquotient $\frac{\partial R}{\partial x} = Y$ stetig übergehen, die X -Komponente aber einen Sprung machen soll derart, daß

$$\mu \frac{\partial R}{\partial Y} \text{ V.} = \frac{\partial R}{\partial Y} \text{ IV.}$$

ist.

Mit Benutzung des im Abschnitt I § 4 gefundenen Ergebnisses schreiben wir die Ausdrücke des Vektorpotentials R für die verschiedenen Gebiete in folgender Gestalt an:

$$\begin{aligned} \text{Gebiet I: } R &= \sum_1^{\infty} A_n e^{knx} \cos kny \\ \text{» II: } R &= \sum_1^{\infty} (B_n e^{knx} + C_n e^{-knx}) \cos kny \\ \text{» III: } R &= \sum_1^{\infty} \left(E_n e^{knx} + F_n e^{-knx} + \frac{4\pi\alpha_n}{n^2 k^2} \right) \cos kny \\ \text{» IV: } R &= \sum_1^{\infty} (D_n e^{+knx} + G_n e^{-knx}) \cos kny \\ \text{» V: } R &= \sum_1^{\infty} H_n e^{-knx} \cos kny. \end{aligned}$$

Für die Konstanten liefern die Uebergangsbedingungen die Beziehungen: Uebergang von Gebiet I zu Gebiet II ($x = 0$)

$$\begin{aligned} A_n &= B_n - C_n \\ \mu A_n &= B_n + C_n. \end{aligned}$$

Uebergang von Gebiet II zu Gebiet III ($x = b$)

$$B_n e^{knb} - C_n e^{-knb} = E_n e^{knb} - F_n e^{-knb}$$

$$B_n e^{knb} + C_n e^{-knb} = E_n e^{knb} + F_n e^{-knb} + \frac{4\pi\alpha_n}{n^2 k^2}$$

Uebergang von Gebiet III zu Gebiet IV ($x = d$)

$$E_n e^{knd} - F_n e^{-knd} = D_n e^{knd} - G_n e^{-knd}$$

$$E_n e^{knd} + F_n e^{-knd} + \frac{4\pi\alpha_n}{n^2 k^2} = D_n e^{knd} + G_n e^{-knd}$$

Uebergang von Gebiet IV zu Gebiet V ($x = y$)

$$D_n e^{knh} - G_n e^{-knh} = -H_n e^{-knh}$$

$$D_n e^{knh} + G_n e^{-knh} = H_n e^{-knh}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$A_n \left[1 - \left(\frac{\mu-1}{\mu+1} e^{-knh} \right)^2 \right] = \frac{1}{\mu+1} \frac{4\pi\alpha_n}{n^2 k^2} (1 - e^{-knc}) e^{-knb} \left[1 + \frac{\mu-1}{\mu+1} e^{-kn(2h-d-b)} \right]$$

$$B_n \left[1 - \left(\frac{\mu-1}{\mu+1} e^{knb} \right)^2 \right] = \frac{2\pi\alpha_n}{n^2 k^2} (1 - e^{-knc}) e^{-knb} \left[1 + \frac{\mu-1}{\mu+1} e^{-kn(2h-d-b)} \right]$$

$$C_n \left[1 - \left(\frac{\mu-1}{\mu+1} e^{-knh} \right)^2 \right] = \frac{\mu-1}{\mu+1} \frac{2\pi\alpha_n}{n^2 k^2} (1 - e^{-knc}) e^{-knb} \left[1 + \frac{\mu-1}{\mu+1} e^{-kn(2h-d-b)} \right]$$

$$E_n \left[1 - \left(\frac{\mu-1}{\mu+1} e^{-knh} \right)^2 \right] = -\frac{2\pi\alpha_n e^{-knc}}{n^2 k^2} \left[1 - \frac{\mu-1}{\mu+1} e^{-2kn(h-d)} (1 - e^{-knc} + \frac{\mu-1}{\mu+1} e^{-kn(b+d)}) \right]$$

$$F_n \left[1 - \left(\frac{\mu-1}{\mu+1} e^{-knh} \right)^2 \right] = -\frac{2\pi\alpha_n e^{knb}}{n^2 k^2} \left[1 - \frac{\mu-1}{\mu+1} e^{-knb} (1 - e^{-knc}) - \left(\frac{\mu-1}{\mu+1} \right)^2 e^{-kn(2h-d+b)} \right]$$

$$G_n \left[1 - \left(\frac{\mu-1}{\mu+1} e^{-knh} \right)^2 \right] = \frac{2\pi\alpha_n}{n^2 k^2} [1 - e^{-knc}] e^{knd} \left[1 + \frac{\mu-1}{\mu+1} e^{-kn(b+d)} \right]$$

$$D_n \left[1 - \left(\frac{\mu-1}{\mu+1} e^{-knh} \right)^2 \right] = e^{-2knh} \frac{\mu-1}{\mu+1} \frac{2\pi\alpha_n}{n^2 k^2} (1 - e^{-knc}) e^{knd} \left[1 + \frac{\mu-1}{\mu+1} e^{-kn(b+d)} \right]$$

$$H_n \left[1 - \left(\frac{\mu-1}{\mu+1} e^{-knh} \right)^2 \right] = \frac{1}{\mu+1} \frac{4\pi\alpha_n}{n^2 k^2} e^{knd} [1 - e^{-knc}] \left[1 + \frac{\mu-1}{\mu+1} e^{-kn(b+d)} \right]$$

§ 3. Kraftlinien.

Die Gleichung der Kraftlinien lautet auch hier

$$R = \text{konst.}$$

Tafel V zeigt ein auf Grund unserer Rechnung angefertigtes Kraftlinienbild.

§ 4. Der Streuinduktionskoeffizient.

Um die mit der Längeneinheit einer Spule verkettete Energie zu berechnen, grenzen wir um diese Spule nach der auf Seite 15 gegebenen Vorschrift einen bestimmten Raumteil ab. Mit einer geringen Erweiterung der daselbst

auseinandergesetzten Schlußweise läßt sich zeigen, daß die in diesem Raumteil aufgespeicherte Energie T wiederum

$$T = \frac{1}{2} \int R i d x d y$$

ist. Die Integration ist über den Querschnitt der betrachteten Spulen zu erstrecken. Sie liefert für eine Primärspule

$$T = \frac{4 \pi i_1 c}{k^3} \sum_n \sin k n \frac{a_1}{2} \alpha_n x_n,$$

wo

$$x_n = 1 - \frac{1 - e^{-k n c}}{k n c \left[1 - \left(\frac{\mu - 1}{\mu + 1} e^{-k n h} \right)^2 \right]} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\mu - 1}{\mu + 1} e^{-2 k n b} (1 - e^{-k n c}) (1 + e^{-2 k n (h - d - b)}) - \left(\frac{\mu - 1}{\mu + 1} \right)^2 e^{-k n (2 h - d + b)} \right].$$

Diesem Wert entspricht nach Gl. (2) ein Streuinduktionskoeffizient für die Längeneinheit

$$s_1 = \frac{16 n_1^2}{c a_1^2 k^3} \sum_n \frac{\sin^2 k n \frac{a_1}{a} \pm \frac{a_1}{2} \sin k n \frac{a_2}{a} \sin k n \frac{a_1}{2}}{n^4} x_n \dots \dots (25).$$

Analog findet man den sekundären Streuinduktionskoeffizienten für die Längeneinheit zu

$$s_2 = \frac{16 n_2^2}{c a_2^2 k^3} \sum_n \frac{\sin^2 k n \frac{a_2}{2} \mp \frac{a_2}{a_1} \sin k n \frac{a_1}{2} \sin k n \frac{a_2}{2}}{n^4} x_n \dots \dots (26).$$

Mit der Beschränkung auf praktisch vorkommende Fälle

$$\left(1 < \frac{a_1 + a_2 + 2 d}{a_1 + a_2} < 2; k c > 1,5 \right)$$

konvergieren die erhaltenen Reihen wieder sehr rasch. Wie früher überwiegt das erste Glied mit seinem Betrage weit die Summe sämtlicher übrigen Glieder. Wir ersetzen daher mit einem ganz geringen Fehler im Endresultat den mit n variablen Faktor x_n durch den Faktor

$$x_1 = 1 - \frac{1 - e^{-k c}}{k c \left[1 - \left(\frac{\mu - 1}{\mu + 1} e^{-k h} \right)^2 \right]} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\mu - 1}{\mu + 1} e^{-2 k b} (1 - e^{-k c}) (1 + e^{-2 k (b^1 - b)}) - \left(\frac{\mu - 1}{\mu + 1} \right)^2 e^{-2 k (h + b^1 + b)} \right].$$

Die Summierung der dann nach bleibenden Reihen haben wir schon auf Seite 19 erledigt. Wir erhalten somit

$$s_1 = \frac{\pi n_1^2}{6 c} \left[3 l - 4 a_1 + \frac{a_1^2 - a_2^2}{6} \right] x_1 \dots \dots (27),$$

$$s_2 = \frac{\pi n_2^2}{6 c} \left[3 l - 4 a_2 - \frac{a_1^2 - a_2^2}{6} \right] x_1 \dots \dots (28).$$

Diese Formeln ziehen sich unter der Voraussetzung eines gegen den Vollaststrom kleinen Magnetisierungsstromes und des Uebersetzungsverhältnisses 1:1 zu der einen Formel:

$$s_1 + s_2 = \frac{2 \pi n^2}{c} \left[l + \frac{a_1 + a_2}{6} \right] x_1 \dots \dots (29)$$

zusammen. Sie gilt natürlich nur für den Teil L_1 des Spulenumfanges, der von beiden Seiten mit Eisen umgeben ist. Für die übrige Länge L_2 bleibt nach

wie vor Formel (21) bestehen. Der induktive Spannungsabfall ergibt sich daher zu

$$\Delta E = \frac{4 \pi^2 n^2 v^2}{c} J L q \left[\Delta + \frac{\sigma_1 + \alpha_1}{6} \right] K_1 \dots \dots \dots (30),$$

$$K_1 = 1 - \frac{1 - e^{-kc}}{kc} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\mu - 1}{\mu + 1} e^{-2kb} (1 - e^{-kc}) \left(\frac{L_2}{L} + \frac{L_1}{L} (1 + e^{-k(b^1 - b)}) \right) - \frac{(\mu - 1)^2 L_1}{\mu + 1} e^{-k(b + b^1 + b)} \right],$$

wobei $\left(\frac{\mu - 1}{\mu + 1} e^{-kh} \right)^2$ als klein gegen die Einheit gestrichen ist.

Der Kappsche Koeffizient hat somit für den Manteltransformator die eben für K_1 angegebene Größe. Er ändert sich beträchtlich mit den Abständen b und b' . Bei unmittelbarer Berührung von Spule und Eisen ($b = b' = 0$) und dem Werte $L_2 = 0$ erreicht er seinen größten Wert, nämlich 1. Dies ist auch der Spezialfall, der der einfacheren Rechnung zugänglich ist und von Kapp gelöst wurde. Mit wachsendem Werte von b und b' sinkt der Faktor K_1 schnell auf die schon beim Kerntransformator gefundene Größe $1 - \frac{1 - e^{-kc}}{kc}$ herab.

Letzterer Fall liegt aus Gründen der Isolierung der Spulen gegen Eisen gewöhnlich vor. Im allgemeinen wird man daher für den Manteltransformator dieselbe Formel (24) wie für den Kerntransformator gebrauchen können. Dies ist indessen nur der Fall, solange $e^{-2kb} (1 + e^{-k(b+b^1)})$ als klein gegen die Einheit zu streichen ist. Trifft letzteres nicht zu, so tritt die Formel (30) in ihr Recht.

Abschnitt IV.

Ueber die zu erwartenden Abweichungen zwischen Rechnung und Messung des Streuinduktionskoeffizienten.

Bei der Aufstellung der Formeln (21), (22), (23), (24), (30) haben wir vernachlässigt,

- 1) den magnetischen Widerstand des Luftraumes oberhalb der Ebene GH und unterhalb der Ebene $G'H'$, Fig. 1).
- 2) Die Krümmung der Spulen.
- 3) Die genaueren Abmessungen des Eisenquerschnittes.
- 4) Den Einfluß der Kerne aufeinander.
- 5) Den Einfluß der Isolation.

Die zu erwartenden Abweichungen zwischen Rechnung und Beobachtung sind indessen nicht bedeutend, wie aus folgendem hervorgeht.

Zu 1) Die an erster Stelle genannte Vernachlässigung hat zur Folge, daß die Formeln (21) und (29) zu große Werte für den Streuinduktionskoeffizienten liefern. Nun können wir leicht auch eine untere Grenze angeben. Zu dem Zwecke erinnern wir uns daran, daß die Kraftlinien sich so verteilen, daß der Kraftfluß und somit auch der Streuinduktionskoeffizient ein Maximum wird. Es muß daher jede willkürlich festgesetzte Kraftlinienverteilung immer auf einen zu kleinen Wert dieses Koeffizienten führen, es sei denn, daß wir gerade den richtigen Verlauf getroffen hätten.

In unserem Falle verfügen wir: der Kraftlinienverlauf zwischen den Ebenen GH und $G'H'$ entspreche genau dem in den vorigen Kapiteln beschriebenen. Die Kraftlinien der geteilten Endspulen sollen sich aber symmetrisch zu diesen Ebenen in den Außenraum hinein fortsetzen. Alsdann sind die magnetischen Widerstände für den Kraftfluß der zwischen den halben Endspulen gelegenen vollen Spulen und somit auch ihre Streuinduktionskoeffizienten dieselben geblieben. Für die Endspulen dagegen ist der magnetische Widerstand auf das Doppelte gestiegen und somit der Streuinduktionskoeffizient auf die Hälfte gesunken. Es bleibt daher der Streuinduktionskoeffizient des ganzen Transformators unter der jetzigen Annahme bei q' primären und q' sekundären Spulen pro Schenkel (die beiden halben Spulen als eine volle gerechnet) um $\frac{25}{q'}$ vH hinter dem durch unsere Formeln gegebenen Werte zurück.

Dies gilt, wenn wir von der Wirkung des Eisens der Jochstücke gänzlich absehen. Wird diese etwa in roher Annäherung durch die Voraussetzung berücksichtigt, daß die Jochstücke beim Kerntransformator $1/3$ (s. Fig. 9 und 10) beim Manteltransformator die Hälfte des mittleren Spulenumfanges bedecken, so folgt für unsere Formeln ein Fehler von höchstens $\frac{17}{q'}$ vH beim Kerntransformator und höchstens $\frac{12,5}{q'}$ vH beim Manteltransformator.

Aus dem Vorhergehenden darf nicht etwa entnommen werden, daß mit der gleichen Genauigkeit die Formeln (19), (20), (27) und (28) den Beitrag der einzelnen Spulen zum ganzen Streuinduktionskoeffizienten richtig wiedergeben. Denn da der wirkliche magnetische Widerstand für den Kraftfluß einer Endspule größer als der in Rechnung gesetzte ist, so ist auch der mit ihr verkettete Kraftfluß kleiner als der berechnete. Infolgedessen muß die dieser Spule am nächsten gelegene ins Unendliche gehende Kraftlinie weit näher als gefunden liegen. Dadurch haben die Kraftlinien der benachbarten vollen Spule Gelegenheit, sich auszubreiten. Der Kraftfluß dieser Spule und somit ihr Streuinduktionskoeffizient vergrößern sich. Nach derselben Schlußweise muß dieser Umstand aber eine Verkleinerung des Streuinduktionskoeffizienten der nächstfolgenden vollen Spule herbeiführen usw. Man erkennt: Gehören die geteilten Endspulen der Sekundärwicklung an, so ist der Streuinduktionskoeffizient einer Primärspule stets größer, derjenige einer Sekundärspule stets kleiner als der durch Formel (19), (20), (27) und (28) gegebene Betrag und umgekehrt (vergl. Seite 37).

Es kann daher sehr wohl vorkommen, daß die Beiträge der geteilten Endspulen noch weit unter der Hälfte des berechneten Betrages liegen¹⁾. Dadurch wird die Richtigkeit der oben angegebenen Fehlergrenze nicht in Frage gestellt, da diese Verminderung durch eine Vergrößerung des Beitrages anderer Spulen aufgehoben wird.

Zu 2) Die Berücksichtigung der Krümmung erfordert einen Zuschlag zu unseren Formeln. Infolge des sehr starken Abfalles der magnetischen Kraft im Gebiete I kann dieser nur klein sein. Bei genau kreisrunden Spulen läßt er sich berechnen. Die partiellen Differentialgleichungen (5), (6) und (7) führen dann auf die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 Rn}{d(rikn)^2} + \frac{1}{rikn} \frac{dRn}{d(rikn)} + Rn \left(1 - \frac{1}{(rikn)^2} \right) = 0 \text{ bzw. } = \text{konst.}$$

¹⁾ Siehe die Versuche auf S. 35 und 36.

Diese lassen sich durch Besselsche Funktionen erster Ordnung und durch eine den Besselschen Funktionen nahe verwandte Funktion integrieren. Es zeigt sich, daß unsere Formeln in erster Annäherung durch Hinzufügen des Faktors $\left(1 + \frac{1}{r^2 k^2}\right)$ berichtigt werden können ($r =$ Spulenradius).

Der durch die Krümmung verursachte Fehler nimmt mit wachsendem Radius sehr schnell ab. Schon bei kleinen Transformatoren (r etwa > 4 ; Größe k lag bei einer Reihe mir aus der Praxis zur Verfügung gestellten Daten durchweg höher als 1) ist er von der Größenordnung wie der unter 1) betrachtete.

Zu 3) Die Vernachlässigung der genaueren Querschnittabmessungen des Transformatorkernelns haben wir schon auf Seite 21 und 25 gerechtfertigt.

Zu 4) Daß der induktive Einfluß der Kerne aufeinander sehr gering ist, geht aus Versuch I A 3 Seite 35 hervor.

Zu 5) Entgegen der von uns gemachten Annahme einer gleichmäßigen Stromverteilung durchsetzt der Strom der Isolation wegen nur einen Bruchteil der Spulenquerschnitte (s. Fig. 6). Die genaue Berechnung des Streuinduktions-

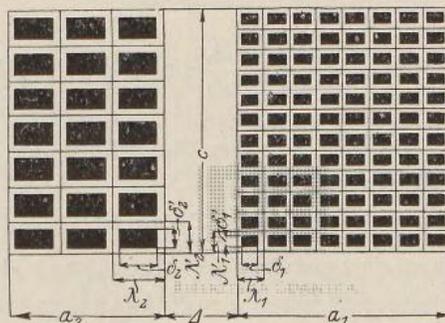


Fig. 6.

koeffizienten unter Berücksichtigung dieses Umstandes führt zu außerordentlich verwickelten Ausdrücken. Wir begnügen uns daher mit der Behandlung eines speziellen Falles. Selbst diesen führen wir nur für den Kerntransformator und nur in erster Annäherung durch. Trotz dieser Vereinfachungen wird das Resultat uns genügende Unterlage zur allgemeinen Abschätzung des in Rede stehenden Einflusses geben.

Es handle sich z. B. um die Berechnung des Streuinduktionskoeffizienten einer Primärspule, etwa der von der x -Achse getroffenen. Alsdann setzen wir voraus:

- 1) der Strom verteile sich über den Querschnitt der Sekundärspule in genau gleicher Weise wie bei einer Primärspule,
- 2) der Luftspalt l , gemessen nach der in Fig. 6 eingetragenen Bedeutung, sei ein ganzes Vielfaches von λ_1 .

Unter diesen Annahmen läßt sich die Strömung mathematisch durch das Produkt dreier die Fig. 7 und 8 dargestellten Funktionen wiedergeben.

$$i = \sum_1^{\infty} a_n \cos kny \cdot \sum_0^{\infty} m \pm \frac{2}{\pi m} \sin k_1 m \frac{\delta_1}{2} \cos k_1 m y \sum_u^1 \frac{2}{\pi u} \sin \frac{k_1' u \delta_1'}{2} \cos k_1' u (x-c) \quad (31)$$

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}; \quad k_1' = \frac{2\pi}{\lambda_1'}$$

Der Akzent am Summenzeichen soll bedeuten, daß das nullte Glied mit der Hälfte des angeschriebenen Betrages in Rechnung zu setzen ist.

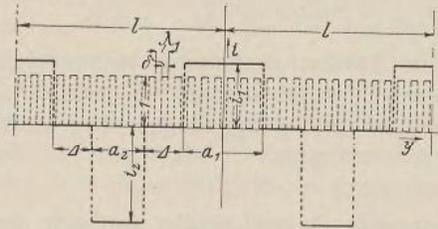


Fig. 7.

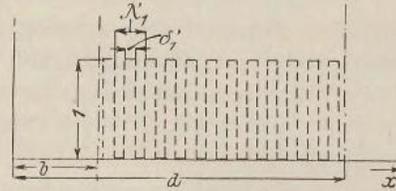


Fig. 8.

Wir berücksichtigen von der an erster Stelle im Produkt (31) stehenden Fourierschen Reihe zunächst nur das erste Glied. Die beiden anderen Fourierschen Reihen brechen wir mit dem zweiten Gliede ab. Mit dieser Vereinfachung lautet der Ausdruck für

$$i = \varepsilon_1 \alpha_1 [\cos ky + t \cos py + t \cos qy] [1 - r \cos k_1' (x - c)] \quad (32),$$

wo

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta_1 \delta_1'}{\lambda_1 \lambda_1'}; \quad t = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda_1}{\delta_1} \sin k_1' \frac{\delta_1}{2}; \quad r = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda_1'}{\delta_1'} \sin k_1' \frac{\delta_1}{2}; \quad -p = k + k_1 \quad q = k_1 - k$$

ist.

Beschränken wir uns nur auf den Querschnitt der betrachteten Primärspule, so gilt mit derselben Annäherung

$$i = \varepsilon_1 [1 + t \cos k_1 y] [1 - r \cos k_1' (x - c)] \quad (33).$$

Nun überzeugt man sich auf dem im Abschnitte I eingeschlagenen Wege leicht davon, daß zu einer Strömung $j = M \cos \zeta y [1 - r \cos k_1' (x - c)]$ im Gebiete III das Vektorpotential

$$R_\zeta = M \left[E_\zeta e^{\zeta x} + F_\zeta e^{-\zeta x} + \frac{4\pi}{\zeta^2} \left(1 - \frac{r \zeta^2}{\zeta^2 + k_1'^2} \cos k_1' (x - c) \right) \right] \cos \zeta y,$$

wo

$$E_\zeta = -\frac{2\pi}{\zeta^2} \left(1 - \frac{r \zeta^2}{k_1'^2 + \zeta^2} \right) e^{-\zeta d}$$

$$F_\zeta = -\frac{2\pi}{\zeta^2} \left(1 - \frac{r \zeta^2}{k_1'^2 + \zeta^2} \right) e^{\zeta b} \left[1 - \frac{\mu - 1}{\mu + 1} e^{-2\zeta b} (1 - e^{-\zeta c}) \right]$$

ist, gehört.

Aus diesem Ausdrucke geht das Vectorpotential für die Stromverteilung (32) dadurch hervor, da= man M und ζ nacheinander die Werte:

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_1 \alpha_1 & k \\ t \varepsilon_1 \alpha_1 & p \\ t \varepsilon_1 \alpha_1 & q \end{array}$$

beilegt und addiert.

Durch das gleiche Verfahren folgt die mit der Längeneinheit der Primärspule verkettete Energie aus dem Integral $\frac{1}{2} \int_b^a \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} R_\zeta i dx dy$, wo für i der Ausdruck (33) zu wählen ist.

Nun ergibt die Integration:

$$\int_{\frac{a}{2}}^a \int_{\frac{a}{2}}^a R_{\zeta} i d x d y = \left[\frac{1}{\zeta} \sin \zeta \frac{a_1}{2} + \frac{t}{k_1 + \zeta} \sin (k_1 + \zeta) \frac{a_1}{2} + \frac{t}{k_1 - \zeta} \sin (k_1 - \zeta) \frac{a_1}{2} \right] \frac{4 \pi c}{\zeta^2}$$

$$\left[1 + \frac{r^2 \zeta^2}{2 (\zeta^2 + k_1'^2)} \right] x \left[1 - \frac{1 - e^{-\zeta c} \left(1 + \frac{\zeta^2}{\zeta^2 + k_1'^2} \right)}{\zeta c \left(1 + \frac{r^2 \zeta^2}{2 (\zeta^2 + k_1'^2)} \right)} \cdot \left(1 - \frac{r \zeta^2}{\zeta^2 + k_1'^2} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\mu - 1}{\mu + 1} e^{-2 \zeta b} (1 - e^{-\zeta c}) \right) \right].$$

Man erhält daher, indem man beachtet, daß $k_1 \frac{a_1}{2} = 2 \pi$ mal einer ganzen Zahl ist,

$$T = \frac{4 \pi \varepsilon_1^2}{k^3} \alpha_1 c \sin k \frac{a_1}{2} \left[1 - \frac{2 t k}{k_1^2 - k} \right] \left[1 + \frac{r^2 k^2}{2 (k^2 + k_1'^2)} \right] \left[1 - \frac{(1 - e^{-k c}) \left(1 + \frac{k^2}{k^2 + k_1'^2} \right)}{k c \left(1 + \frac{r^2 k^2}{2 (k^2 + k_1'^2)} \right)} \left(1 - \frac{r k^2}{k^2 + k_1'^2} \right) \right]$$

$$\left[1 - \frac{1}{2} \frac{\mu - 1}{\mu + 1} e^{-2 k b} (1 - e^{-k c}) \right] + \varepsilon_1^2 \alpha_1 \frac{4 \pi c t^2}{p^2 k} \sin k \frac{a_1}{2} \left[1 + k \left(\frac{1}{(k_1 + k) t} + \frac{1}{2 k_1 + k} \right) \right] \left[1 + \frac{r^2 p^2}{2 (p^2 + k_1'^2)} \right]$$

$$\left[1 - \frac{(1 - e^{-p c}) \left(1 + \frac{p^2}{p^2 + k_1'^2} \right)}{p c \left(1 + \frac{r^2 p^2}{2 (p^2 + k_1'^2)} \right)} \left(1 - \frac{r p^2}{p^2 + k_1'^2} \right) \right] \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\mu - 1}{\mu + 1} e^{-2 p b} (1 - e^{-p c}) \right]$$

$$+ \varepsilon_1^2 \alpha_1 \frac{4 \pi c t^2}{q^2 k} \sin k \frac{a_1}{2} \left[1 - k \left(\frac{1}{(k_1 - k) t} + \frac{1}{2 k_1 - k} \right) \right] \left[1 + \frac{r^2 q^2}{2 (q^2 + k_1'^2)} \right]$$

$$\left[1 - \frac{(1 - e^{-q c}) \left(1 + \frac{q^2}{q^2 + k_1'^2} \right)}{q c \left(1 + \frac{r^2 q^2}{2 (q^2 + k_1'^2)} \right)} \left(1 - \frac{r q^2}{q^2 + k_1'^2} \right) \right] \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\mu - 1}{\mu + 1} e^{-2 q b} (1 - e^{-q c}) \right].$$

In diesem Ausdrucke streichen wir in der Korrektur mit Rücksicht darauf, daß die Zahlen k_1 und k_1' groß gegen k sind, die Größen $\left(\frac{k}{k_1}\right)^2$; $\left(\frac{k}{k_1'}\right)^2$ gegen die Einheit. Hierdurch vereinfacht sich die magnetische Energie zu dem Werte

$$T = \frac{\varepsilon_1^2 \alpha_1 4 \pi c}{k^3} \left[1 + \frac{r^2 k^2}{2 k_1'^2} \right] \left[1 - \frac{2 t k}{k_1^2} \right] \left[1 + \frac{2 k^2 t^2 \left[1 + \frac{r^2 k_1^2}{2 (k_1^2 + k_1'^2)} \right]}{k_1^2 \left(1 - \frac{1 - e^{-k c} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\mu - 1}{\mu + 1} e^{-2 k b} (1 - e^{-k c}) \right)}{k c} \right)} \right]$$

$$\left[1 - \frac{1 - e^{-k c} \left(1 + \frac{k^2}{k_1'^2} \right)}{k c \left(1 + \frac{r^2 k^2}{2 k_1'^2} \right)} \left(1 - \frac{r k^2}{k_1'^2} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\mu - 1}{\mu + 1} e^{-2 k b} (1 - e^{-k c}) \right) \right].$$

Unter Vernachlässigung der Wirkung des Eisens können wir schreiben:

$$T = \frac{4 \pi c \varepsilon_1^2 \alpha_1}{k^3} \left[1 + \frac{r^2 k^2}{2 k_1'^2} \right] \left[1 - \frac{2 t k}{k_1'^2} \right] \left[1 + \frac{2 k^2 t^2 \left(1 + \frac{r^2 k_1^2}{2 (k_1^2 + k_1'^2)} \right)}{k_1^2 \left(1 - \frac{1 - e^{-k c}}{k c} \right)} \right]$$

$$\left[1 - \frac{1 - e^{-k c}}{k c} \left(1 - \frac{k^2}{k_1'^2} \right) \left(1 - \frac{r k^2}{k_1'^2} \right) \left(1 - \frac{r^2 k^2}{2 k_1'^2} \right) \right].$$

Hieraus ergibt sich der Beitrag zum Streuinduktionskoeffizienten, der von dem ersten Gliede der an erster Stelle in (31) stehenden Fourierschen Reihe herrührt, zu:

$$s = \frac{16 n_1^2}{c a_1^2 k^3} \left[1 + \frac{r^2 k^2}{2 k_1'^2} \right] \left[1 - \frac{2 t k}{k_1^2} \right] \left[1 + \frac{2 k^2 t^2 \left(1 + \frac{r k_1^2}{2 (k_1^2 + k_1'^2)} \right)}{k_1^2 \left(1 - \frac{1 - e^{-k c}}{k c} \right)} \right] \\ \left[\sin^2 k \frac{a_1}{2} - \frac{a_1}{a_2} \sin k \frac{a_1}{2} \sin k \frac{a_2}{2} \right] \left[1 - \frac{1 - e^{-k c}}{k c} \left(1 + \frac{k^2}{k_1'^2} \right) \left(1 - \frac{r k^2}{k_1^2} \right) \left(1 - \frac{r^2 k^2}{2 k_1'^2} \right) \right] \quad (34).$$

Die Beiträge der höheren Glieder dieser Reihe lauten ähnlich. Ihre Summe beträgt aber nur wenige Hundertstel des Betrages (34). Berechnen wir diese angenähert nach dem auf Seite 19 angewandten Verfahren, so erhalten wir für den primären Streuinduktionskoeffizienten für die Längeneinheit unter Berücksichtigung der ungleichförmigen Verteilung des Stromes den Wert

$$s_1 = \pi n_1^2 \left[3 l - 4 a_1 + \frac{a_1^2 - a_2^2}{l} \right] \left[1 + \frac{k^2}{k_1^2} \left(\frac{r_1^2}{2} - 2 t_1 + 2 t_1^2 \frac{\left(1 + \frac{r_1^2 k_1^2}{2 (k_1^2 + k_1'^2)} \right)}{1 - \frac{1 - e^{-k c}}{k c}} \right) \right] \\ \left[1 - \frac{1 - e^{-k c}}{k c} \left[1 + \frac{k^2}{k_1'^2} \left(1 - r_1 - \frac{r_1^2}{2} \right) \right] \right] \quad (35).$$

Analog schreibt sich der sekundäre Streuinduktionskoeffizient für die Längeneinheit:

$$s_2 = \pi n_2^2 \left[3 l - 4 a_2 - \frac{a_1^2 - a_2^2}{l} \right] \left[1 + \frac{k^2}{k_2^2} \left(\frac{r_2^2}{2} - 2 t_2 + 2 t_2^2 \frac{\left(1 + \frac{r_2^2 k_2^2}{2 (k_2^2 + k_2'^2)} \right)}{1 - \frac{1 - e^{-k c}}{k c}} \right) \right] \\ \left[1 - \frac{1 - e^{-k c}}{k c} \left[1 + \frac{k^2}{k_2'^2} \left(1 - r_2 - \frac{r_2^2}{2} \right) \right] \right] \quad (36).$$

Die Formeln gelten zunächst nur unter den Seite 27 genannten Voraussetzungen. Nun hängt aber aus physikalischen Gründen für irgend eine Spule die hier zu berechnende Korrektur im wesentlichen nur von der Stromverteilung über ihren eigenen Querschnitt, die in erster Annäherung richtig in die Rechnung eingeführt wurde, und erst in untergeordnetem Maße von der Stromverteilung über die Querschnitte der übrigen Spulen ab, Fig. 6. In ersterer Annäherung gelten daher obige Formeln allgemein.

Wie ihr Vergleich mit den Formeln (19) und (20) lehrt, nimmt die Erhöhung des Streuinduktionskoeffizienten infolge der ungleichförmigen Stromverteilung mit wachsenden Werten k_1, k_1', k_2, k_2' , d. h. mit wachsender Windungszahl, ab. Sie steigt, wie zu erwarten, mit den Größen t_1, r_1, t_2, r_2 , d. h. mit der Stärke der Isolation.

In der Praxis gehören in der Regel nur große und nur kleine Werte der Größen k_1, k_1', r_1, s_1 oder k_2, k_2', r_2, s_2 zusammen. Die berechnete Erhöhung nimmt daher keine bedeutenden Werte an. Sie beträgt z. B. für den Fall

$$a_1 = 2,55, \quad a_2 = 1,80, \quad \Delta = 0,6 \quad c = 5,5, \quad k = 1,17 \text{ cm},$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0,365, \quad \lambda_1' = \lambda_2' = 0,9, \quad \delta_1 = \delta_2 = 0,265, \quad \delta_1' = \delta_2' = 0,7 \text{ cm}$$

für den Streuinduktionskoeffizienten der Primärspule noch nicht 0,5 vH, für den Streuinduktionskoeffizienten der Sekundärspule knapp 2 vH.

Etwas ähnliches gilt für Wickeldraht mit kreisrundem Querschnitt.

Wir überblicken nun nochmals die in diesem Abschnitt besprochenen Korrekturen und prüfen den Sinn, mit dem eine jede von ihnen unsere früher gefundenen Formeln für den Streuinduktionskoeffizienten und den induktiven Spannungsabfall beeinflusst. Die Korrektur 1 erfordert einen Nachlaß; sämtliche übrigen Korrekturen erfordern einen Zuschlag. Die Korrekturen heben sich somit gegenseitig teilweise auf. Dieser Umstand ist für die Brauchbarkeit unserer Formeln von größter Bedeutung. In der Regel überwiegt die Korrektur 1 sämtliche übrigen. Wir schließen daher:

Gibt man in den Formeln des Kapitels II und III den Größen a_1 , a_2 , c , \mathcal{L} die aus Fig. 6 hervorgehenden Bedeutungen, so muß der Fehler zwischen Rechnung und Messung des Streuinduktionskoeffizienten im allgemeinen stets weniger als $\frac{17}{q}$ vH beim Kerntransformator und $\frac{12,5}{q}$ vH beim Mantelblechtransformator betragen.

Abschnitt V.

Prüfung der Theorie durch Versuche.

§ 1. Beschreibung der benutzten Transformatoren.

Die in den vorhergehenden Abschnitten entwickelte Theorie wurde an zwei Transformatoren mit dem Uebersetzungsverhältnis 1:1 geprüft.

Der eine von ihnen, ein zu Versuchszwecken benutzter 2 KW-Transformator der Berliner Maschinenbau-A.-G. vorm. Schwartzkopf hatte ursprünglich nur volle Spulen besessen und war von mir mit geteilten Endspulen versehen worden. Damit jede einzelne Spule dem Versuche zugänglich gemacht würde, waren ihr Anfang und Ende zu zwei seitlich angebrachten Schaltbrettern herausgeführt. Die uns interessierenden Konstruktionsdaten finden sich in Fig. 9. Das daselbst eingeschriebene wichtige Maß für die Spulenhöhe, das nur unter Zerstörung der Isolation einer direkten Messung zugänglich gewesen wäre (die Spulen waren mit Leinenband umwickelt und in Firnis getaucht), macht keinen Anspruch auf große Genauigkeit. Es läßt sich nur sagen, daß es zwischen 13,5 und 16,5 liegen mußte. Infolgedessen ist der berechnete Streuinduktionskoeffizient, der sich nach Formel (23) zu $1,34 \cdot 10^{-4}$ Henry ergibt, um etwa 10 vH unsicher, was bei seinem Vergleiche mit dem gemessenen Werte zu berücksichtigen ist.

Im Gegensatz hierzu gelten die in Fig. 10 eingeschriebenen Abmessungen des zweiten Transformators, der aus Anlaß meiner Untersuchungen, jedoch auch mit Rücksicht auf weitere Zwecke konstruiert wurde, mit großer Genauigkeit. Das Eisen dieses Transformators konnte leicht entfernt und somit sein Einfluß bestimmt werden. Aehnlich wie beim vorigen Transformator waren Anfang und Ende einer jeden in Fig. 10 durch eine Ziffer kenntlich gemachten Spule zu einem kleinen Schaltbrett herausgeführt. Gemessen wurde nur an den Spulen I, III, V, VII, VI, IV, II. Nach Formel (21) erhält für den gesamten Streuinduktionskoeffizienten dieser Spulen bei hineingestecktem Eisenkern $4,24 \cdot 10^{-3}$ Henry, bei herausgezogenem Eisenkern $4,05 \cdot 10^{-3}$ Henry.

Bedenklich kann der Umstand erscheinen, daß in das Feld dieser Spulen die Spulen 1, 2, 3, 3, 5, 6, VIII gebracht sind, in denen Wirbelströme entstehen.

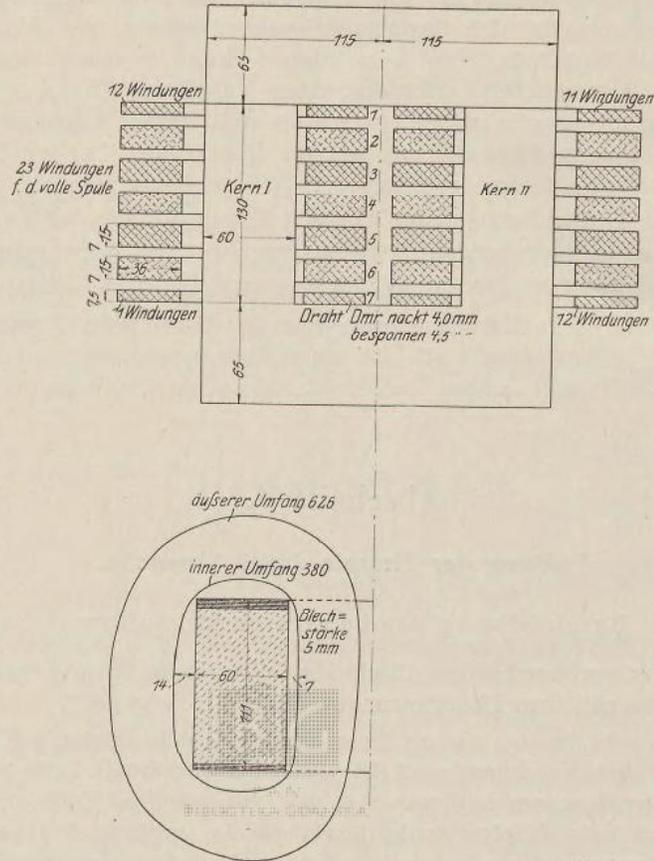


Fig. 9. Transformator I.

Die unter diesem Einfluß vorhandene Verkleinerung des Streuinduktionskoeffizienten ist indessen vernachlässigbar, wie die in § 3 besprochene Messung zeigen wird.

§ 2. Methode der Messung und Versuchsanordnung.

Die Streuinduktionskoeffizienten wurden wie Selbstinduktionskoeffizienten in der Brücke gemessen. Es wurde sowohl der Streuinduktionskoeffizient S des ganzen Transformators bei Gegen- (s. Fig. 11) oder Kurzschlußschaltung (s. Fig. 12) der Spulen mit einer bekannten Selbstinduktion N , als auch der Beitrag α einer abzweigenden Spule oder Spulengruppe mit dem Beitrage $S - \alpha$ sämtlicher übrigen Spulen (s. Fig. 13) verglichen und nach den Formeln

$$S = \frac{W_3}{W_4} N$$

$$\alpha = S \frac{W_4}{W_3 + W_4}$$

bestimmt.

Eine weit abstehende Wechselstrommaschine diente als Wechselstromquelle. Die erzeugte Periodenzahl betrug 55 ind. sk. Es wurde darauf geachtet, daß der bei A gemessene Strom, der den jeweiligen Transformator ohne merkliche

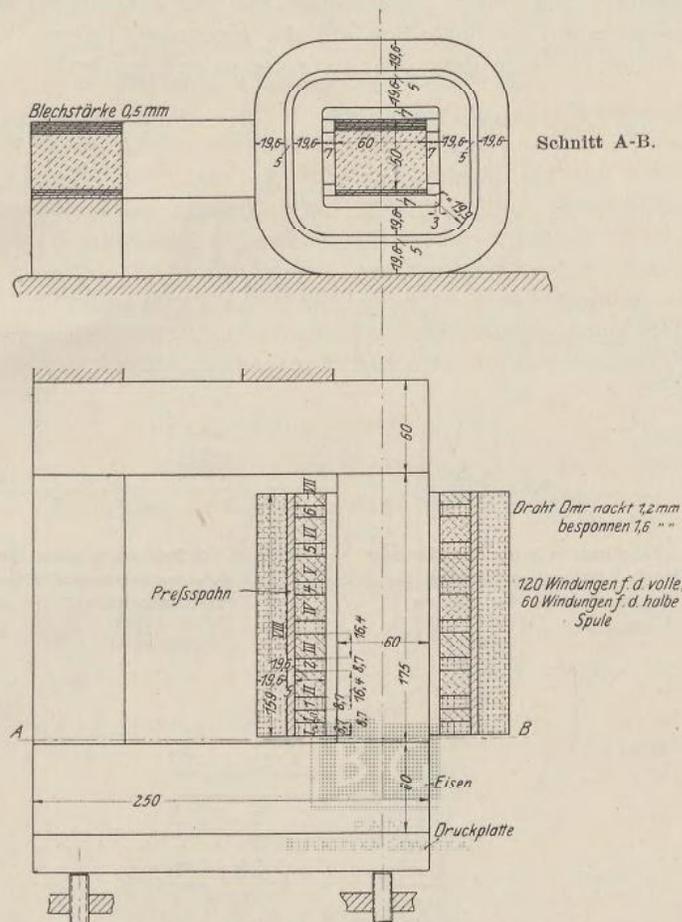


Fig. 10. Transformator II.

Verkleinerung durch Abzweigung durchfließt, ungefähr der normalen Belastung des Transformators entsprach.

Die zum Vergleiche notwendigen Selbstinduktionen bestanden aus zwei eisenfreien Rollen. Die eine war mit Rücksicht auf die hohe benutzte Stromstärke aus Draht von 2,5 mm, die andere aus Draht von 1 mm Dmr. hergestellt. Vor und nach jedem Versuch wurde ihr Selbstinduktionskoeffizient mit Schwachstrom, aber bei der oben erwähnten Periodenzahl gegen zwei Normalien der Firma Siemens & Halske gemessen und zu $1,750 (\pm 0,013) 10^{-4}$ bzw. $2,55 (\pm 0,01) 10^{-3}$ Henry gefunden.

Die Widerstände W_3 und W_4 mit bekanntlich zu vernachlässigender Selbstinduktion wurden zwei vor dem Versuche geprüften Stöpselrheostaten entnommen. Der feineren Einstellung wegen waren sie unter sich durch einen gewöhnlichen Brückendraht von 1Ω mit hundertteiliger Skala (α) verbunden. Den Anschluß an die übrigen Zweige vermittelten je nach Bedarf kurze oder höchstens 2 m lange Kabel (BC und DE) von 16 mm^2 Querschnitt.

Als Nullinstrument diente ein auf 55 Perioden eingestimmtes optisches Telephon, welches mir Hr. Prof. Dr. M. Wien gütigst zur Verfügung gestellt hatte. Die Spannung für dieses Instrument wurde durch zwei Schleifkontakte

vom Brückendraht und einem Widerstande (FG) aus Nikelindraht abgenommen. Letzterer konnte somit kontinuierlich auf die eine oder andere Seite der benachbarten Brückenarme ganz oder teilweise gelegt werden.

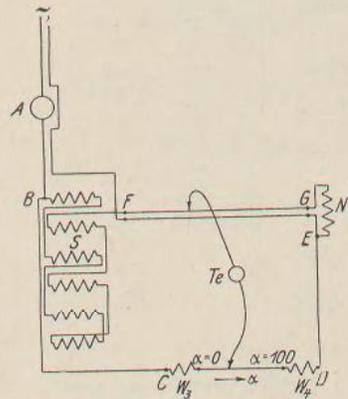


Fig. 11. Schaltungsschema für Messung des Streuinduktionskoeffizienten bei Gegenschaltung der Spulen.

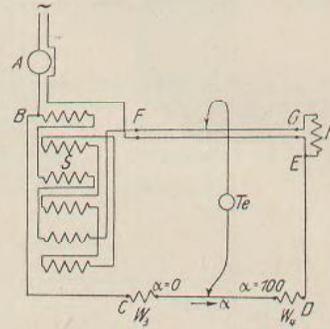


Fig. 12. Schaltungsschema für Messung des Streuinduktionskoeffizienten bei Kurzschlußschaltung der Spulen.

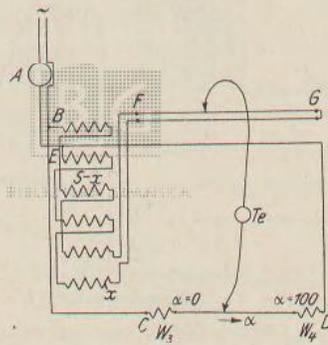


Fig. 13. Schaltungsschema bei Messung des Streuinduktionskoeffizienten der einzelnen Spulen.

§ 3. Fehlerquellen.

Es hat durchaus keine Schwierigkeit, Streuinduktionskoeffizienten von der in Betracht kommenden Größenordnung hinreichend genau zu messen. Die Hauptfehlerquelle der Versuchsanordnung bestand in der Selbstinduktion des Leiters zwischen Transformator und Vergleichsrolle und der Selbstinduktion der Verbindungsstücke zwischen den einzelnen Spulen. Sie wurde dadurch herabgedrückt, daß kurze, wenn möglich bifilar geführte Verbindungsstücke zur Verwendung kamen. Aus diesem Grunde dürfte der Meßfehler für den Streuinduktionskoeffizienten des ganzen Transformators weit weniger als 1 vH betragen, während er diesen Betrag für den Beitrag einer einzelnen Spule wohl überschreiten konnte.

Gegen die besprochene Fehlerquelle treten die übrigen Fehlerquellen zurück, die in der gegenseitigen Induktion des Transformators und der von ihm weit entfernten Vergleichsrolle, in der Vernachlässigung des Widerstandes der

Drähte *BC* und *DE* und der vorkommenden Kontaktstellen und in der Vernachlässigung der Selbstinduktion der Widerstände W_3 und W_4 bestehen. Diese Fehlerquellen sind mehrfach erörtert worden. Wir verweisen auf die Arbeit von O. Prerauer, Wiedemanns Annalen 1894 Seite 772.

Zum Nachweise dafür, daß die Verkleinerung des Streuinduktionskoeffizienten durch Wechselströme in den Spulen 1, 2, 3, 4, 5, 6, VIII (s. Ende vom § 1 dieses Kapitels) nur klein ist, wurde versucht, die mit ihr verbundene Widerstandserhöhung zu messen. Dies geschah durch eine unmittelbar nach der Wechselstromeinstellung vorgenommene Gleichstromeinstellung. Es konnte aber eine Aenderung des Widerstandes nicht nachgewiesen werden, obwohl mir eine solche im Werte von 1 pro Mille sicherlich nicht entgangen wäre. Aus diesem Grunde ist unter den vorliegenden Verhältnissen auch die befürchtete Verminderung des Streuinduktionskoeffizienten zu vernachlässigen.

§ 4. Versuchsergebnisse.

I) Versuche am Transformator I.

A) Messung der gesamten Streuinduktion.

1) Für Kern I.

a) Bei Gegenschaltung.

$W_3 \Omega$	$W_4 \Omega$	α cm	Strom bei <i>A</i> Ampere	<i>N</i> Henry	<i>S</i> gemessen in Henry	<i>S</i> berechnet	Abweichung in \sqrt{H}
110	134	65,5	14,5	$1,75 \cdot 10^{-4}$	$1,43 \cdot 10^{-4}$	$1,34 \cdot 10^{-4}$	— 6,3

b) Bei Kurzschluß.

110	134	60,5	14,5	$1,75 \cdot 10^{-4}$	$1,438 \cdot 10^{-4}$	$1,34 \cdot 10^{-4}$	— 6,8
-----	-----	------	------	----------------------	-----------------------	----------------------	-------

2) Für Kern II.

a) Bei Gegenschaltung.

110	131,9	38,5	14,5	$1,75 \cdot 10^{-4}$	$1,45 \cdot 10^{-4}$	$1,34 \cdot 10^{-4}$	— 7,6
-----	-------	------	------	----------------------	----------------------	----------------------	-------

b) Bei Kurzschluß.

110	131,9	52	14,5	$1,75 \cdot 10^{-4}$	$1,45 \cdot 10^{-4}$	$1,34 \cdot 10^{-4}$	— 7,6
-----	-------	----	------	----------------------	----------------------	----------------------	-------

3) Für beide Kerne.

a) Bei Gegenschaltung.

110	66,1	51,5	14,5	$1,75 \cdot 10^{-4}$	$2,90 \cdot 10^{-4}$	} Erhöhung des Streuinduktionskoeffizienten durch induktive Einwirkung beider Kerne 0,7 \sqrt{H} .
110	66,1	57,2	14,5	$1,75 \cdot 10^{-4}$	$2,90 \cdot 10^{-4}$	

B) Messung der Beträge der einzelnen Spulen.

1) Kern I.

$W_3 \Omega$	$W_4 \Omega$	α cm	Strom bei <i>A</i> Ampere	Nr. der abgeschalteten Spulen	Beitrag α	Spule	Beitrag
110	5,7	67,5	14,2	7	0,0516	7	0,0516
110	10,0	57	14,2	1+7	0,0862	1	0,034
110	25,4	51	14,2	1+7+3	0,190	3	0,103
110	47,8	81,5	14,2	1+7+3+5	0,302	5	0,112
110	134,2	49	14,2	1+7+3+5+2	0,550	2	0,247
110	374,2	73	14,2	1+7+3+5+2+4	0,772	4	0,223
						6	0,227

2) Kern II.

110	270	57	16,3	1+7+5+3+6+4	0,710	2	0,290
110	105	56	16,3	1+7+5+3+6	0,488	4	0,221
110	40	42	16,3	1+7+5+3	0,268	6	0,219
110	24,3	51	16,3	1+7+5	0,183	3	0,085
110	7,4	61	16,3	1+7	0,066	5	0,117
						1+7	0,066

II) Versuche am Transformator II.

A) Messung der gesamten Streuinduktion.

1) Für den Transformator mit Eisen.

a) Bei Gegenschaltung.

$W_3 \Omega$	$W_4 \Omega$	α cm	Strom bei A Ampere	N Henry	S gemessen in Henry	S berechnet Henry	Abweichung in vH
400	240,8	45	1,0	$2,55 \cdot 10^{-3}$	4,25	$4,24 \cdot 10^{-3}$	- 0,2

b) Bei Kurzschluß.

400	236,2	45	1,0	$2,55 \cdot 10^{-3}$	$4,31 \cdot 10^{-3}$	$4,24 \cdot 10^{-3}$	- 1,6 ¹⁾
-----	-------	----	-----	----------------------	----------------------	----------------------	---------------------

2) Für den Transformator ohne Eisen.

Messung bei Gegenschaltung.

400	252,7	42	1,0	$2,55 \cdot 10^{-3}$	$4,05 \cdot 10^{-3}$	$4,13 \cdot 10^{-3}$	2,0
-----	-------	----	-----	----------------------	----------------------	----------------------	-----

B) Messung des Beitrages der einzelnen Spulen.

1) Für den Transformator mit Eisen.

$W_3 \Omega$	$W_4 \Omega$	α cm	Strom bei A Ampere	Nr. der abgeschalteten Spule	Beitrag derselben	Spule	Beitrag
400	14,2	49	1,1	I_β	0,036	I_β	0,036
400	67,3	48	1,1	$I_\beta + III$	0,145	III	0,109
400	137	47	1,1	$I_\beta + III + V$	0,256	V	0,111
400	165	48	1,1	$I_\beta + III + V + VII$	0,292	VII	0,036
200	225	46	1,1	$I_\beta + III + V + VII + VI$	0,529	VI	0,237
100	314,2	43	1,1	$I_\beta + III + V + VII + VI + VI$	0,757	IV	0,243
						II	0,243

2) Für den Transformator ohne Eisen.

400	19,7	48	1,0	I_β	0,048	I_β	0,048
400	106,7	48	1,0	$I_\beta + III$	0,212	III	0,164
360	179	52	1,0	$I_\beta + III + V$	0,367	V	0,145
360	219	53	1,0	$I_\beta + III + V + VII$	0,422	VII	0,055
170	277	58	1,0	$I_\beta + III + V + VII + VI$	0,620	VI	0,198
100	399	59	1,0	$I_\beta + III + V + VII + VI + IV$	0,800	IV	0,180
						II	0,200

III) Es wurde nach einer Einstellung bei normalem Belastungsstrom der Transformatoren der Strom durch Aenderung der Erregung der Wechselstrommaschine auf mehr als das Doppelte, so weit es die Erwärmung der Leiter zuließ, erhöht oder nach und nach bis auf ganz kleine Werte (Ausschalten der

¹⁾ Die Abweichung der beobachteten Werte bei Kurzschluß- und Gegenschaltung rührt daher, daß für diesen Transformator infolge seiner 4 Stofflagen der Magnetisierungsstrom verhältnismäßig bedeutend ist.

Erregung) geschwächt. Eine Aenderung der Einstellung im Brückenzeige *BCDE* ergab sich nicht.

Aus diesen Versuchen geht hervor:

- 1) Der gemessene und berechnete Streuinduktionskoeffizient stimmen völlig zufriedenstellend miteinander überein.
- 2) Der Streuinduktionskoeffizient ist von der Stromstärke unabhängig.
- 3) Der Einfluß des Eisens auf die Erhöhung des Streuinduktionskoeffizienten ist klein und von der von uns angegebenen Größenordnung.
- 4) Die einzelnen Spulen liefern in Uebereinstimmung mit der Seite 26 ausgesprochenen Regel verschiedene Beiträge zum ganzen Streuinduktionkoeffizienten.

Mit dem Vorhergehenden kann das Streufeld für den Transformator mit Scheibenwicklung und geteilten Endspulen als erledigt gelten. Es liegt nun die Frage nahe nach der gleichen Aufgabe für denselben Transformator mit vollen Endspulen und den Transformator mit Zylinderwicklung.

Für letzteren brauchen wir uns nur den Raum nach der in Fig. 14 ange-

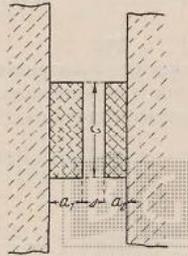


Fig. 14.

gebenen Weise mit Eisen ausgefüllt denken, um einzusehen, daß Streuinduktionskoeffizient und Spannungsabfall bezogen auf das Uebersetzungsverhältnis 1 : 1 sich durch die folgenden Formeln:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{8 \pi n^2}{c} L \left(\frac{\Delta}{2} + \frac{a_1 + a_2}{6} \right) \left(1 - \frac{1 - e^{-kc}}{kc} \right) 10^{-9} \text{ Henry.} \quad (37)$$

$$\Delta E = \frac{16 \pi^2 n^2 v}{c} JL \left(\frac{\Delta}{2} + \frac{a_1 + a_2}{6} \right) \left[1 - \frac{1 - e^{-kc}}{kc} \right] 10^{-9} \text{ Volt.} \quad (38)$$

$$k = \frac{\pi}{a_1 + a_2 + \Delta}$$

angenähert wiedergeben lassen. Uebrigens lassen sich auch ohne diese Einschränkung die genauen Formeln finden und somit der Fehler bei Anwendung von (37) und (38) feststellen. Ich hoffe, hierauf in einer späteren Arbeit zurückkommen zu können.

Viel verwickelter liegen die Verhältnisse beim Transformator mit Scheibenwicklung und vollen Endspulen, Die Schwierigkeit besteht nicht darin, Formeln überhaupt aufzustellen, als vielmehr brauchbare Annäherungsformeln zu geben.

Zum Schlusse ist es mir eine angenehme Pflicht, dem Vorsteher des Elektrotechnischen Instituts, Hrn. Professor Dr. Rössler und dem Hrn. Dozenten Dr. K. Simons für die mir zur Verfügung gestellten Hilfsmittel und für die Unterstützung beim experimentellen Teile dieser Arbeit meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

Danzig-Langfuhr, den 25. September 1907.

Zusammenfassung.

Für den Transformator mit Scheibenwicklung und geteilten Endspulen gelten folgende Sätze:

1) Der Streuinduktionskoeffizient ist von der Aenderung der Permeabilität mit der Stärke und der Phase des Belastungsstromes praktisch durchaus unabhängig.

2) Die Abmessungen des Eisenpaketes beeinflussen die Größe des Streuinduktionskoeffizienten nur in ganz geringem Grade.

3) Der Streuinduktionskoeffizient S und der induktive Spannungsabfall ΔE , Fig. 15, des ganzen Transformators, bezogen auf das Uebersetzungsverhältnis 1:1,

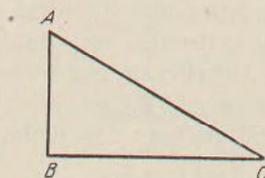


Fig. 15.

A B Ohmscher Spannungsabfall,
B C induktiver Spannungsabfall,
A C Kurzschlußspannung.

lassen sich sowohl für den Kern- wie Manteltransformator nach den folgenden Formeln berechnen:

$$S = \frac{2 \pi n^2}{c} \left(\Delta + \frac{a_1 + a_2}{6} \right) Lq \left[1 - \frac{1 - e^{-kc}}{ke} \right] 10^{-9} \text{ Henry}$$

$$\Delta E = \frac{4 \pi^2 n^2 \nu}{c} \left(\Delta + \frac{a_1 + a_2}{6} \right) LqJ \left[1 - \frac{1 - e^{-kc}}{ke} \right] 10^{-9} \text{ Volt}$$

$$k = \frac{2 \pi}{l}$$

Hier bedeutet e die Basis der natürlichen Logarithmen, J den Belastungsstrom in Ampere, ν die Periodenzahl, n und L die Windungszahl bzw. mittleren Umfang einer vollen Spule, q die Anzahl der primären oder sekundären Spulen (zwei halbe immer als eine volle gerechnet). Die übrigen Beziehungen gehen aus Fig. 2 bzw. 4 hervor. Sämtliche Längen sind in cm zu messen (vergl. die auf Seite 31 berechneten und auf Seite 35 und 36 gemessenen Werte von Streuinduktionskoeffizienten).

Beide Formeln gelten unter völliger Vernachlässigung der Wirkung des Eisens. Will man diese abschätzen, so hat man für den Kerntransformator die Formeln

$$S = \frac{2 \pi n^2}{c} \left(\Delta + \frac{a_1 + a_2}{6} \right) \left(1 - \frac{1 - e^{-kc}}{ke} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\mu - 1}{\mu + 1} e^{-2kb} (1 - e^{-kc}) \right) \right) Lq 10^{-9} \text{ Henry}$$

$$\Delta E = \frac{4 \pi^2 n^2 \nu}{c} \left(\Delta + \frac{a_1 + a_2}{6} \right) \left(1 - \frac{1 - e^{-kc}}{ke} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\mu - 1}{\mu + 1} e^{-2kb} (1 - e^{-kc}) \right) \right) LqJ 10^{-9} \text{ Volt}$$

und für den Manteltransformator die Formeln

$$S = \frac{2 \pi n^2}{c} \left(\Delta + \frac{a_1 + a_2}{6} \right) LqK 10^{-9} \text{ Henry}; \Delta E = \frac{4 \pi^2 n^2 \nu}{c} \left(\Delta + \frac{a_1 + a_2}{6} \right) LqJK 10^{-9} \text{ Volt},$$

wo

$$K = 1 - \frac{1 - e^{-kc}}{kc} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\mu - 1}{\mu + 1} e^{-2kb} (1 - e^{-kc}) \left(\frac{L - L_1}{L} + \frac{L_1}{L} (1 - e^{-k(b'-b)}) - \left(\frac{\mu - 1}{\mu + 1} \right)^2 e^{-k(b+b'+b'') \frac{L_1}{L}} \right) \right)$$

ist, auszuwerten, indem man für die Abstände b und b' (siehe Fig. 2 und 5) die untere und obere Grenze nach der gegebenen Konstruktion einsetzt. Unter L_1 ist dabei derjenige Teil des Spulenumfanges zu verstehen, der beim Manteltransformator von beiden Seiten mit Eisen umgeben ist.

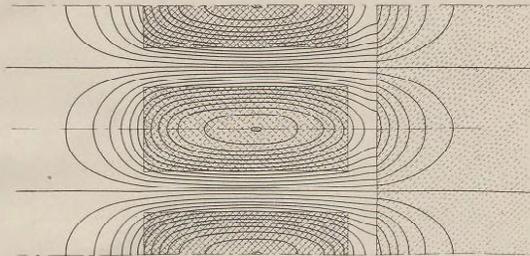
4) Der Fehler zwischen dem berechneten und dem wirklichen Streuinduktionskoeffizienten muß nach den Ueberlegungen des Abschnittes IV im allgemeinen weniger als $\frac{33}{q} \text{ vH}$ beim Kerntransformator und weniger als $\frac{25}{q} \text{ vH}$ beim Manteltransformator betragen.

5) Die Komponenten der magnetischen Kraft des Streufeldes lassen sich auf Grund der Maxwellschen Gleichungen als Differentialquotienten eines Vektorpotentials darstellen. Die Linien konstanten Vektorpotentials fallen mit den magnetischen Kraftlinien zusammen. Auf dieser Grundlage beruhen die gezeichneten Kraftlinienbilder Tafel I bis V.

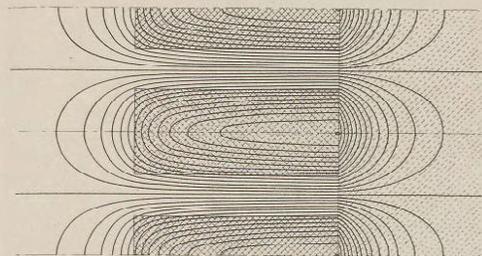




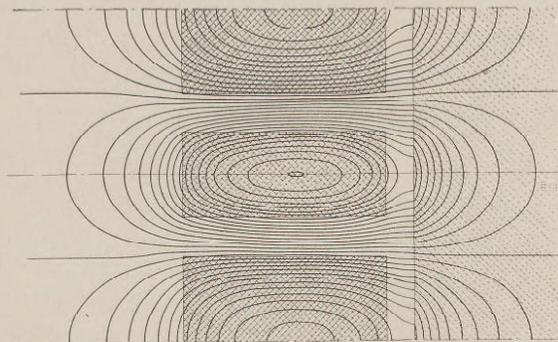
BRITISH LIBRARY



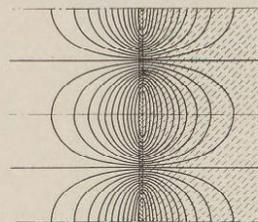
Tafel I. Streufeld eines Kerntransformators, bei gleicher Höhe der Spulen und abstehendem Eisen.



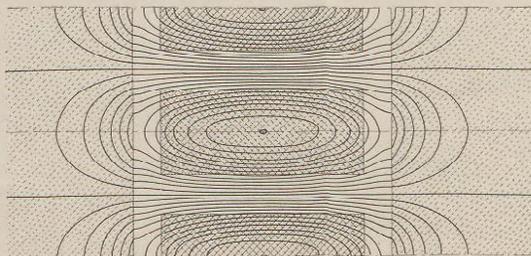
Tafel II. Streufeld eines Kerntransformators bei gleicher Höhe der Spulen und aufliegendem Eisen.



Tafel III. Streufeld eines Kerntransformators bei verschiedener Höhe der Spulen und abstehendem Eisen.



Tafel IV. Das Streufeld bei sehr dünnen Spulen.



Tafel V. Streufeld eines Manteltransformators.



PERPUSTAKAAN
NASIONAL DAN
ARSIP RAJYAN



BRITISH BIRCH



BRITISH COLUMBIA LIBRARIES